پل های کونیگسبرگ:

داستان پل های کونیگسبرگ را منشأ تولد نظریه گراف دانسته اند.

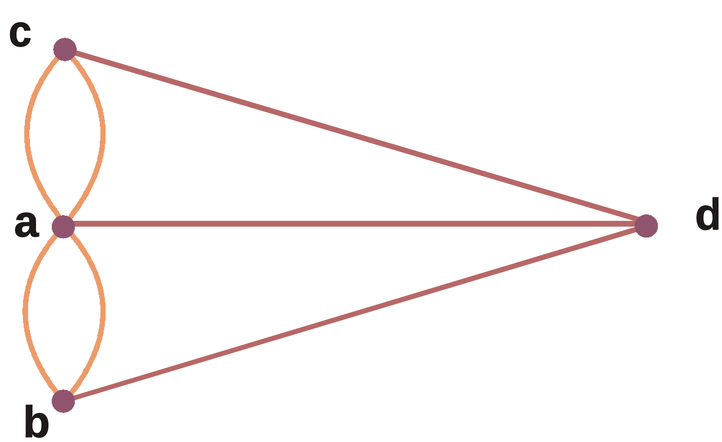
این معمای واقعی نخستین بار توسط اویلر به یک مساله ریاضی تبدیل و شد نظریه گراف شکل گرفت

نخستین مقاله مربوط به گرافها را لئونهارت اویلر (1783 – 1707 میلادی) ریاضیدان سویسی نوشت که جز مجموعه انتشارات آکادمی علوم سن پترزبورگ (لنینگراد) درسال 1736 به چاپ رسید. اویلر یکی از تاثیر گذارترین افراد در تاریخ علوم است. او در سال 1727، در 20 سالگی، به عضویت در آکادمی روسیه دعوت شد. وی پیش از آنکه خود را وقف ریاضیات، فیزیک و نجوم کند، به تحصیل الهیات، زبانهای شرقی و طب پرداخته بود. تبحر او در همه این رشته ها فوق العاده و حاصل کارش بسیار بود. زمانی که سرگرم نوشتن مقاله اش درباره گرافها بود بینایی یکی از چشمانش را از دست داد، و به هنگام پیری کاملاً نابینا شد، ولی حتی این پیشامد موجب کاهش میزان نوشته های او نشد. از سالهای پیش ریاضیدانهای سویسی،به ویژه آنهایی که اهل شهر بازل[1] زادگاه او هستند، به چاپ مجموعه کامل آثار اویلر پرداخته اند، این مجموعه،در پایان کار متجاوز از 80 جلد خواهد بود.

اویلر مقاله خود درباره گرافها را با بررسی معمایی به نام مساله پلهای کونیگسبرگ آغاز کرد. شهر کونیگسبرگ (کالینینگراد بعدی) در پروس شرقی سابق در سواحل رودخانه پر گل[2] واقع است و قسمتی از آن،مطابق شکل ، در میان رودخانه قرار دارد. در گذشته بخشهای مختلف شهر به وسیله هفت پل به یکدیگر متصل بودند. یکشنبه ها،طبق معمول شهرهای آلمان، اهالی گرد شهر به گردش می پرداختند. پرسشی در آن زمان مطرح شده بود: آیا می شود نقشه این ((پیاده روی)) را طوری طرح کرد که شخص پس از خروج از

خانه بتواند با یک بار و فقط یک بار عبور از هر پل به خانه اش برگردد؟

در شکل پایین بخشهای چهارگانه شهر با حرفهای d,c,b,a نشان داده شده اند. چون فقط عبور از پلها مورد نظر ماست، می توانیم d,c,b,a را به عنوان راسهای یک گراف و یالهای متصل کننده این راسها را متناظر با پلها فرض کنیم. این گراف در شکل دوم رسم شده است (البته اویلر از چنین گرافی استفاده نکرد).



طبق استدلال اویلر نمی توان فقط با استفاده از یک گذرگاه دوری، این گراف را کاملاً پیمود؛ به بیانی دیگر، از هر راسی که شروع کنیم، نمی توانیم بدون عبور مجدد از یال یا یالهایی کل گراف را بپیماییم و به نقطه شروع باز گردیم. چنان گذرگاهی به تعداد دفعاتی که به راسی وارد می شود،از آن خارج می گردد؛ بنابراین، لازم است که تعداد یالهای متصل به هر راس زوج باشد، و این شرط در گراف نشاندهنده نقشه کونیگسبرگ برقرار نیست.

پس از بحث مقدماتی درباره پلهای کونیگسبرگ، اویلر به بررسی کل مساله پرداخت: در چه گرافهـایی می توان گذرگاهی دوری پیدا کرد که از همه یالها عبور کند و البته از هیچ یالی بیش از یک بار عبور نکند؟ که به این مساله در حالت کلی گرافهای اویلری می گویند که در ادامه بحث خواهد شد.

---

[1] Basel

[2] *Pregel*

گرافهای اویلری:

همانطور که با پل های کونیگسبرگ آشنا شدیم در بسیاری موارد نیاز به آن داریم که تمام یالها را دقیقاً یکبار طی کنیم و به همان نقطه شروع برگردیم.

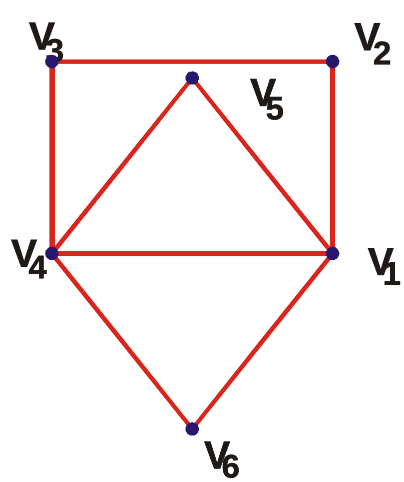
گراف اویلری. گراف همبند G را اویلری گویند اگر گذر بسته ای در آن وجود داشته باشد که از تمام یالها بگذرد.

گذر اویلری. به گذر بسته فوق الذکر گذر اویلری می گویند.

گراف نیمه اویلری. اگر شرط بسته بودن را از تعریف حذف کنیم.

- گراف اویلری همانند بازی رسم یک شکل بدون برداشتن خودکار از روی کاغذ می باشد یعنی اگر بتوان گرافی را به صورت پیوسته از یک جا شروع به رسم کرد و دوباره به همان جا رسید، اویلری می باشد:

مثال. گراف زیر اویلری است.



گذر بسته اویلر آن $v_1v_2v_3v_4v_1v_5v_6v_1$ می باشد.

یادآوری. می دانیم اگر G گرافی باشد که درجه تمام رئوس آن لااقل 2 باشد، G لااقل یک مدار دارد.

حال می خواهیم شرط لازم و کافی را برای اویلری بودن گراف بیان کنیم.

قضیه. گراف همبند G یک گراف اویلری است اگر و فقط اگر درجه تمام رئوس آن زوج باشد.

اثبات. اولاً اگر گراف G اویلری باشد و C یک گذر بسته اویلری آن باشد،دقت کنید در این گذر به ازای هر بار ورود از یک یال به راس v دقیقاً در حرکت بعد از این راس خارج می شود (راس ابتدایی هم یک بار اول خارج و در آخر وارد می شویم)

پس ملاحظه می کنید برای هر راس تعداد دفعات ورود و خروج آن یکسان بوده و از طرفی مجموع آنها درجه راس را تشکیل می دهد.

پس بدیهی است درجه هر راس گراف بایستی زوج باشد.

بر عکس فرض کنید که G گراف همبند نااویلری با حداقل یک یال و بدون راس درجه فرد باشد.

چنین گراف G را با کمترین یال ممکن انتخاب کنید. چون هر راس G حداقل دارای درجه دو است، G شامل یک گذر بسته است (تمرین **2.7.1**). فرض کنید C یک گذر بسته با ماکسیمم طول ممکن در G باشد. بنابه فرض، C یک سیر اویلر ی G نیست و لذا $G-E(C)$ دارای مولفه G' با $e(G')>0$ است. چون C خودش اویلری است، راسهای درجه فرد ندارد؛ از این رو گراف همبند G' هم راسهای درجه فرد ندارد. چون $e(G')<e(G)$، از نحوه انتخاب G نتیجه می شود که، G' دارای سیر اویلر C' است. اینک، چون G همبند است، راس v در $V(C)\cap V(C')$ وجود دارد، و بدون اینکه به کلیت مطلب لطمه ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که v آغاز و پایان C و C' است. اما در این صورت CC' یک گذر بسته G با

$e\left(CC'\right) > e\left(C\right)$ است که متناقض با انتخاب G است.

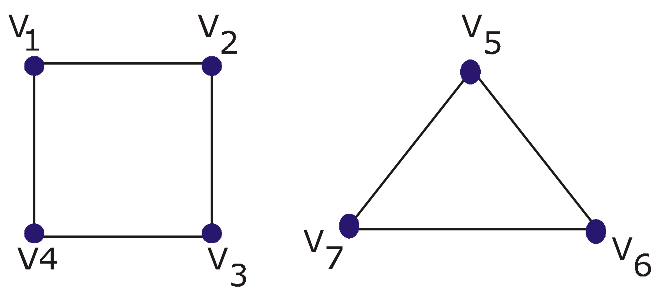
بنابراین برای هر گراف داده شده G برای چک کردن اویلری بودن آن کافی است دو شرط

1. همبند بودن و

2. درجه تمام رئوس زوج بودن را چک نمایید.

مثال. آیا هر گراف که درجه تمام رئوس آن زوج باشد اویلری است.

حل. خیر باید همبند باشد مثال نقض :



نتیجه. گراف G ، دارای یک گذر اویلری است اگر و تنها اگر حداکثر دارای دو راس درجه فرد بوده و همبند باشد.

اثبات. اگر G دارای گذر اویلری (نه الزاماً بسته) باشد مانند برهان قبل باید درجه تمام رئوس بجز رئوس ابتدایی و انتهایی گذر، زوج باشد.

برعکس، اگر G همبند دارای 2 راس درجه فرد باشد، برای بدست آوردن گذر اویلری آن کافی است یک راس u به گراف افزوده و به این دو راس درجه فرد متصل نمود. ما حصل گرافی همبند خواهد بود که تمام رئوس آن زوجند، این گراف یک گذر بسته اویلری دارد.

حال از این گذر بسته u را حذف می کنیم، گذر بسته را از u می بریم، سمت راست و چپ آن ابتــدا و انتهای یک گذر اویلری خواهند شد.

مثال. به ازای چه n هایی k_n اویلری است؟

حل. چون در k_n درجه هر راس $n-1$ است و $n-1$ باید زوج باشد پس n باید فرد باشد.

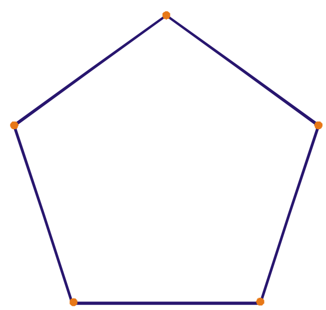
مثال. به ازای چه n,m هایی $k_{m,n}$ اویلری است.

راهنمایی. دقت کنید در گراف دو بخشی، با هر حرکت بر روی یال بخشی که در آن قرار داریم عوض می شود.

حل. به عنوان تمرین.

گرافهایی دوری:

یک گراف دوری یک گراف $n \geq 3$ راسی 2 منتظم همبند می باشد. به عبارت ساده تر گراف دور همـان یک دور n راسی بدون هیچ یال اضافه می باشد. مانند:



گرافهای دوری خواص ساده ای چون برابری تعداد یالها و راسها، تک کلاس هم ارزی بودن برای یک n مشخص و اویلری بودن دارد.

اما آنچه باعث شد ما این مطلب را دراین جا قرار دهیم آن است که گرافهای دوری در حقیقت بخـشی از اشتراک گراف های اویلری و گراف های هامیلتونی است که در مطلب بعدی تعریف خواهند گشت.

در حقیقت گرافهای مداری در مرز جدایی مطلب قبلی (اویلری و مطلـب بعـدی (هـامیلتونی) قـرار گرفته اند و برای درک مفهوم هامیلتونی که وجود دوری به طول n می باشد مفید هستند. و اما برویم سـراغ اصل مطلب یعنی گرافهای هامیلتونی در مبحث بعدی :

گرافهای همیلتونی :

پس از پایان تعاریف و مفاهیم گذر اویلری باید گفت که همانطور که در گذر اویلری هدف پیمودن تمام یالها دقیقاً یکبار و بازگشتن به نقطه شروع می باشد، در مبحث همیلتونی هدف طی کردن تمام راسها دقیقاً یکبار و برگشتن به راس آغازین می باشد. دقت کنید در دور همیلتونی الزاماً همه یالها پیمایش نمی شوند.

تعاریف:

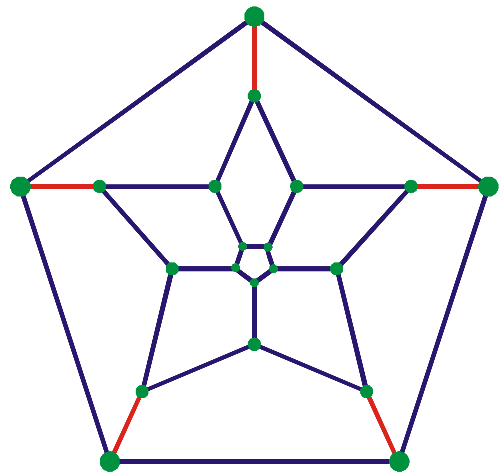
مسیر همیلتونی. مسیری از گراف G که شامل هر راس G باشد مسیر همیلتونی می نامند (در مسیر راس تکراری نداریم)

دور همیلتونی. مشابه بالا دوری است که شامل همه رئوس باشد.

دور همیلتونی دوری به طول $|V|$ می باشد.

نام همیلتون به این دسته از دورها از سر ویلیام همیلتون به خاطر تحقیقات وی در وجود این مدارها در گراف خاصی به نام گراف همیلتون گرفته شده است.

گراف هامیلتون یک دوازده وجهی منتظم می باشد که اگر آن را در صفحه بخواهیم رسم کنیم به صورت زیر در می آید:



جالب است که این گراف هامیلتونی بوده و دارای دورهای هـامیلتونی زیبـایی اسـت کـه در   کمکـی آموزشی آمده است.

اما در مبحث گرافهای اویلری دیدیم که با یک شرط لازم و کافی برای اویلری بودن به تمـام ابهامـات پاسخ داده شد و بسیار به نظر می رسد که چنین شرط لازم و کافی ای در این مبحث نیز وجود داشـته باشـد ولیکن تعیین شرط یا شروط لازم و کافی همیلتونی بودن یک گراف هنوز به عنوان یک مساله لاینحـل بـاقی مانده است،

اگر چه شرط لازم کافی محکم نداریم ولیکن شروط لازم نسبتاً خوبی برای همیلتونی بودن وجود دارند که به ترتیب بیان می گردند:

قضیه. اگر G یک گراف ساده با $(n \geq 3)$ راس باشد و اگر برای هر دو راس نامجاور v,u داشته باشیم $\underbrace{\deg(u)}_{\text{درجه } u} + \underbrace{\deg(v)}_{\text{درجه } v} \geq n$ آنگاه G هامیلتونی است.

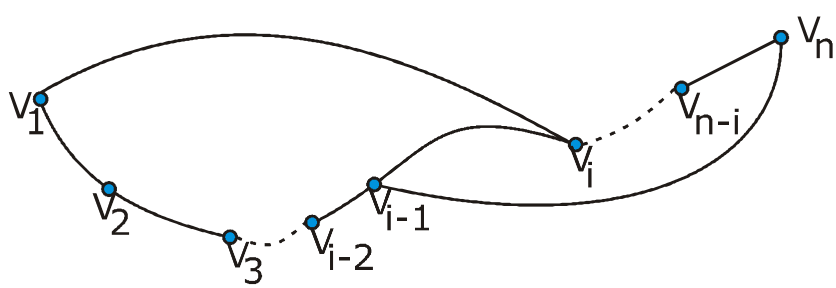
اثبات. چون G همبند است پس هر دو راس آن با مسیری به هم متصل می باشند بنـابراین مـی تـوان

یک مسیر همیلتنی مانند $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$ بدست آورد. (چرا؟) اگر این مسیر هــامیلتونی خــود یــک مدار همیلتنی باشد حکم حاصل شده است در غیر این صورت رئوس v_n, v_1 غیر همجوارنــد. در ایــن صــورت می‌توان نوشت

درجه راس v_1 درجه v_n

$$d(v_1) + d(v_n) \geq n$$

آنگاه راسی مانند v_i همجوار با v_1 وجود دارد به طوری که v_{i-1} همجوار v_n است (چرا؟)



در این صورت یک مدار هامیلتونی در G مانند

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \ldots \to v_i \to v_1$$

یافته ایم پس G همیلتونی است.

نتیجه:

قضیه دیراک.

اگر در گراف ساده و همبند G با $n \geq 3$ راس داشته باشیم:

$$d|v| \geq \frac{n}{2}$$ (v راس دلخواه از G است)

آنگاه G همیلتنی است.

اثبات. دو راس غیر همجوار مانند v,u را اختیار می کنیم (حتماً دو راس غیر همجوار وجود دارد چـون اگر نباشد گراف کامل است و در نتیجه همیلتنی است)

آنگاه می توان نوشت $d(u)+d(v) \geq n \Leftarrow d(u)+d(v) \geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}$

پس طبق قضیه قبل G همیلتنی است.

مثال. در گراف اویلری شرط تکراری نبودن یالها را داریم و می دانیم که ممکن اسـت درگـذر اویلـری راسها تکرار شوند، در عوض در گراف های همیلتونی شرط تکراری نبودن راسها را در دور همیلتونی داریم. آیا ممکن است در دور هامیلتونی یال تکراری داشته باشیم؟

حل. معلوم است که نه! زیرا اگر یالی تکرار شود دو راس دو سر آن هم تکرار می شود و این با تعریـف دور همیلتونی تناقض دارد.

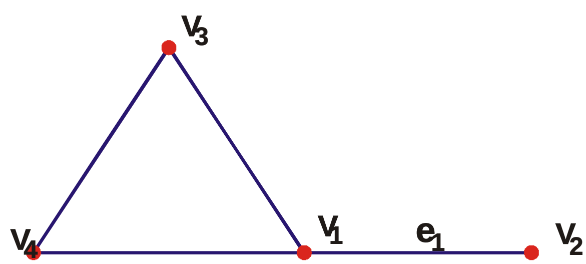
راس برشی و یال برشی و k- همبندی :

اکنون می خواهیم با مفاهیمی که بیان کننده میزان همبندی یک گراف می باشند آشنا شویم.

نخست راس و یال برشی را تعریف می کنیم.

یک راس برشی و یا یک یال برشی می باشد اگر با حذف آن راس یا یال، تعداد مولفــه هــای همبنــدی افزایش یابد.

مثلاً در شکل مقابل e_1, v_1 برشی می باشند.



نتیجه رئوس تنهای و رئوس درجه 1 برشی نمی باشند.

تعریف. **مجموعه ناهمبند ساز یالی گراف G، مجموعه یالهایی از G می باشد کــه حــذف آنهــا تعــداد مولفه های G را افزایش می دهد.**

تعریف. **مجموعه برشی یالی گراف G نیز، مجموعه ناهمبند سازی یالی گراف G می باشد که هیچ زیــر مجموعه نابرابر آن، ناهمبند ساز یالی G نباشد.**

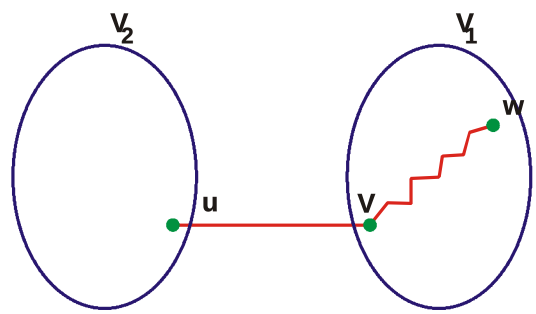
عدد همبندی یالی را برابر با اندازه کوچکترین مجموعه برش یالی گراف G تعریف می کنــیم و مفهــوم آن این است که گراف G در مقابل حذف حداکثر چند یال می تواند مقاومت کند و ناهمبند نشود! اگر عــدد

همبند یالی K,G باشد آنگاه G را همبند یالی نامند.

- تعاریف فوق دقیقاً برای راسها نیز برقرار می باشد.
- اگر عدد همبندی راسی K,G باشد آنگاه به k – همبند راسی و نیز به اختصار " k – همبند " می گویند.

قضیه. هر گراف همبند با بیش از 2 راس که یک یال برشی داشته باشد لااقل یک راس برشی نیز دارد.

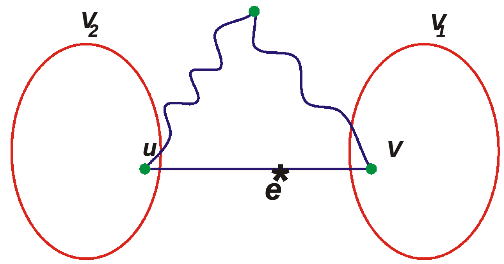
اثبات. فرض کنیم $e=uv$ یال برشی مفروض باشد.



و با حذف e، رئوس به دو مولفه همبندی v_1,v_2 افراز شوند. از آنجا که گراف لااقل 3 راس دارد بنابر اصل لانه کبوتری یکی از این مولفه ها لااقل 2 راس داشته و فرض کنیم $|V_1|\geq 2$، آنگاه ادعا کنیم v راس برشی خواهد بود زیرا با حذف v، ارتباط راس دیگر V_1 با u نیز قطع خواهد شد (چرا؟)

قضیه. یال $e=uv$ یک یال برشی G می باشد اگر و فقط اگر در $G-e$ هیچ مسیر (u,v) موجود نباشد.

برهان خلف. اگر v,u با مسیر دیگری بجز e به هم متصل باشند همانطور که در شکل واضح است دیگر e برشی نخواهد بود زیرا ارتباط v,u بجز e از مسیر دیگری نیز برقرار می باشد.



قضیه. یک یال $e=uv$ یک یال برشی G می باشد اگر و فقط اگر به هیچ دوری تعلق نداشته باشد.

یک طرف این قضیه که فوراً از قضیه قبل نتیجه می گردد، زیرا اگر uv یالی از یک دور G باشند پس میان v,u مسیر دیگری بجز e نیز وجود خواهد داشت پس e برشی نخواهد بود.

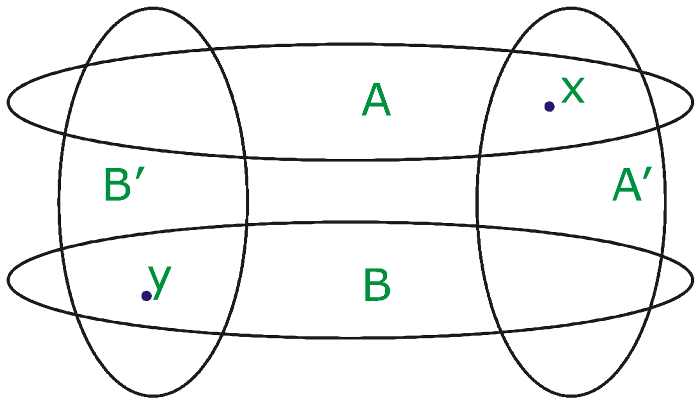
اما بالعکس اگر e به هیچ دوری تعلق نداشته باشد، e برشی می باشد زیرا بنابه برهان خلف اگر نباشد با حذف e مسیر دیگری میان v,u وجود خواهد داشت که با افزودن e به آن مسیر یک دور بوجود خواهد آمد که با فرض در تناقض می باشد.

قضیه. اگر v راس برشی G باشد ثابت کنید راس برشی $\overline{G}$ نخواهد بود.

فرض می کنیم v راس برشی هم G هم $\overline{G}$ باشد پس با حذف آن هم G ناهمبند می شود هم $\overline{G}$ پس هم G به دو دسته B,A افراز می گردد که هیچ یالی بین B,A نیست هم رئوس $\overline{G}$ به دو دسته B^1,A^1 افراز می گردد که هیچ یالی بین A^1 با B^1 وجود ندارد.

حال فرض کنید $x\in A\cap A^1$ و $y\in B\cap B^1$

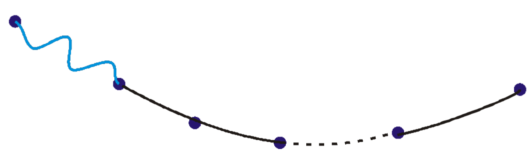
آنگاه $xy\notin E(G), xy\notin E(\overline{G})$ که چنین چیزی ممکن نیست.



قضیه. هر گراف ساده همبند حداقل دو راس دارد که برشی نیستند.

اثبات. بزرگترین مسیر آن را در نظر می گیریم. ثابت می کنیم رئوس ابتدایی و انتهایی این مسیر برشی نیستند.

برهان خلف. اگر یکی از آنها مثلاً راس اول بزرگترین مسیر برشی باشد،پس لااقل به یکی از رئوس غیر از این دور مسیری داشته و این یعنی مسیری طولانیتر از مسیر بزرگترین فرض کرده وجود دارد و این یعنی تناقض.



گراف های k- همبند:

مفهوم گرافهای k - همبند آنجا ظاهر می شود که یک شبکه ارتباطی در برابر نقض چقدر قدرت تحمل دارد. وقتی از گراف یک شبکه شروع به حذف یالها می کنیم، الزاماً همبندی بر هم نمی خورد و هدف ما ارزش گذاری به حداقل تعداد یالهایی است که باید حذف شود تا گراف همبندی خود را از دست دهد.

تعریف.

گراف k-همبند یالی. گراف G را k همبند یالی گویند اگر لااقل k یال باید از گراف حذف شوند تا گراف همبندی خود را از دست دهد.

به بیان دیگر، تا کمتر از $k-1$ یال اگر به هر ترتیبی حذف کنیم همبندی بر هم نمی خورد.

مثال. ثابت کنید گراف کامل $n-1,(n>2)k_n$ همبند یالی است.

حل. به عنوان تمرین.

مثال. ثابت کنید $\left(n>2\right)k_n$ نمی تواند، nهمبند یالی باشد.

حل. به سادگی تمام $n-1$ یال منتهی به یک راس را حذف کنید. همبندی بر هم می خورد.

تعریف

گراف k–همبند. مشابه قبل گراف Gرا k - همبند گویند اگر برای ناهمبند کردن آن لااقل k راس باید از گراف حذف شوند.$\left(k<|V|\right)$

به بیان دیگر به هر شکل که $k-1$ راس را از آن حذف کنیم همبندی پابرجا می ماند.

مثال. عدد همبندی گراف k_n را بدست آورید.

حل. به عنوان تمرین

گرافهای 2- همبند.

با مشخص ساختن گرافهای 2- همبند آغاز می کنیم. دو مسیر درونی _مجزا هستند اگر هیچکدام شامل نقطه پایانی راسی از دیگری نباشد.

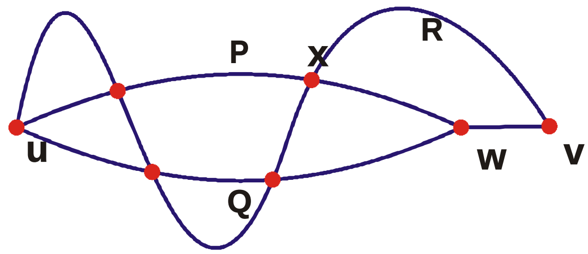
قضیه. یک گراف بیسوی G که دارای حداقل سه راس باشد، 2-همبند است اگر، و فقط اگر، هر جفت

$u,v\in V(G)$ به وسیله یک جفت $u,v-$ مسیر درونی $-$ مجزا در به هم وصل شوند.

اثبات. هنگامی که G دارای u,v - مسیرهای درونی _مجزا باشد، حذف یک راس نمی توانـد u را از v جدا کند. چون این مطلب برای هر جفت v,u در نظر گرفته شده است، از این رو شرط کافی است. برعکس، فرض کنیم که G ، 2- همبند است. با استقرا روی $d(u,v)$، ثابت می کنـیم کـه G دارای دو u,v - مـسیر درونی $-$ مجزا می باشد.

هنگامی که $d(u,v)=1$، گراف $G-uv$ همبند است،زیرا $k'(G)\geq k(G)=2$ یک u,v - مسیر در $G-uv$ درونی $-$ مجزا در G است که از u,v - مسیر متشکل از خود یـال uv باشد.

برای گام استقرا، $d(u,v)=k>1$ را در نظر می گیریم و فرض کنیم کـه G دارای x,y - مـسیرهای درونی$-$ مجزا می باشد، هر گاه $1\leq d(x,y)<k$ فرض کنیم w راس پیش از v روی یک کوتاهترین u,v - مسیر باشد. داریم $d(u,w)=k-1$ و از این رو بنابر فرض استقرا G دارای u,w - مسیرهای درونی $-$ مجزا Q,P است. چون $G-w$ همبند است، $G-w$ شامل یک u,v - مسیر مانند R است. اگر این مـسیر از P یا Q اجتناب کند، به پایان کار رسیده ایم، اما R ممکن است در راسهای درونی با هـر دوی Q,P شـریک باشد. فرض کنیم x آخرین راس از R باشد که به $P\cup Q$ متعلق است. بنابر تقارن، می توانیم فـرض کنـیم $x\in P$. u,v - زیر مسیر از P را با x,v - زیر مسیر از R ترکیب می کنیم تا یک u,v - مسیر درونی- مجزا از $Q\cup wv$ به دست می آوریم.



لم. (بسط لم) اگر G یک گراف k - همبند باشد، و G' از G با افزودن یک راس جدید y، مجاور حداقل k راس از G، به دست آید، آنگاه k, G' - همبند است.

اثبات. فرض کنیم S یک مجموعه جداساز از G' است. اگر $y \in S$، آنگاه $S-\{y\}$، G را جدا می کند،پس $|S| \geq k+1$. اگر $y \notin S, N(y) \subseteq S$ ، آنگاه $|S| \geq k$ در غیر این صورت، S باید G را جدا کند، و باز هم $|S| \geq k$.

قضیه. اگر $n(G) \geq 3$، آنگاه شرایط زیر هم ارزند (و گرافهای 2- همبند را مشخص می کنند).

الف. G همبند است و دارای هیچ راس برشی نیست.

ب. به ازای هر $x, y \in V(G)$، x, y - مسیرهای درونی – مجزا وجود دارند.

پ. به ازای هر $x, y \in V(G)$ یک دور میان y, x وجود دارد.

ت. $d(G) \geq 1$ ، و هر جفت از یالها در G،روی یک دور مشترک قرار می گیرند.

اثبات. چند قضیه قبل هم ارز (الف) و (ب) است. دورهای شامل y, x متناظر با جفتهای x, y - مسیرهای درونی – مجزا هستند، پس (ب) $\Leftrightarrow$ (پ). برای (ت) $\Leftarrow$ (پ)، (ت) را برای یالهای متصل به y, x مطلوب به کار می بریم.

برای (الف)، (پ) $\Leftarrow$ (ت)، فرض کنیم G، 2- همبند است و $uv, xy \in E(G)$. راسهای w را با