

تمرینات فصل اول

۱- گزاره‌های زیر مفروض‌اند:

p : « گزاره q دروغ است».

q : « گزاره p راست است».

آیا گزاره p راست است؟ چرا؟

پاسخ:

درستی یا نادرستی عبارتهایی مانند عبارتهای بالا را نمی‌توان تعیین کرد. چرا که اگر p راست باشد، آنگاه q دروغ است. بنابراین جمله « گزاره p راست است » دروغ می‌باشد. پس p دروغ است و این متناقض با راست بودن p است.

به همین ترتیب اگر p دروغ باشد آنگاه گزاره q درست است. بنابراین جمله « گزاره p راست است » درست می‌باشد. پس p درست است و این متناقض با دروغ بودن p است. پس در هر حالت به تناقض می‌رسیم.

۲- کدام یک از عبارات زیر، گزاره و کدام یک گزاره نیستند؟ جوابهای خود را توضیح دهید.

(الف) جمعیت ایران، ۸۰ میلیون نفر است.

(ب) در نیمکره شمالی، تیرماه در فصل زمستان قرار دارد.

(ج) فیلها، حیوانات باهوشی هستند.

(د) x بزرگتر از y است.

(ه) خداحافظ علی!

پاسخ:

گزاره یک جمله خبری است که یا راست است یا دروغ ولی نه هر دو.

بنابراین

(الف) یک جمله خبری است. پس، یک گزاره است.

(ب) یک جمله خبری است که دروغ می‌باشد. پس، یک گزاره (دروغ) می‌باشد.

(ج) یک جمله خبری است. پس، یک گزاره می‌باشد.



WWW.Teach.Toghraee.IR

WWW.Toghraee.IR

(د) چون مقدار x, y مشخص نیست لذا عبارت مزبور یک گزاره نمی‌باشد. (عبارت « x بزرگتر از y است» یک گزاره‌نما می‌باشد.)

(هـ) جمله خبری نیست، لذا گزاره نمی‌باشد.

۲- گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

p : یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است. F

q : یک کلمه دارای ۲ بایت است. F

r : یک بیت مساوی صفر و یا یک است. T

گزاره‌های نمادین زیر را به زبان فارسی نوشته و راست یا دروغ بودن هر کدام را مشخص کنید.

(الف) $p \wedge q$ (ب) $p \vee q$ (ج) $\sim p$ (د) $\sim (p \wedge q)$

(هـ) $\sim p \wedge \sim q$ (و) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\sim (p \wedge r)]$

پاسخ:

(الف)

$p \wedge q$: یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است و یک کلمه دارای ۲ بایت است. گزاره‌های p, q دروغ و گزاره r راست است (یک بایت معمولاً از ۸ بیت تشکیل شده و یک کلمه از تعداد متناهی بایت تشکیل می‌شود). پس $p \wedge q$ دروغ است.

(ب)

$p \vee q$: یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده یا یک کلمه دارای ۲ بایت است.

چون p, q هر دو دروغ هستند، پس $p \vee q$ نیز دروغ است.

(ج)

$\sim p$: چنین نیست که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است.

چون p دروغ است، پس نقیض آن، $\sim p$ راست است.

(د)

$\sim (p \wedge q)$: چنین نیست که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده و یک کلمه دارای ۲ بایت است.

در (الف) دیدیم که $p \wedge q$ دروغ است، پس نقیض آن، $\sim (p \wedge q)$ ، راست است.

(هـ)

$\sim p \wedge \sim q$: چنین نیست که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده و چنین نیست که یک کلمه دارای ۲ بایت است.

با توجه به اینکه $\sim p, \sim q$ ، راست هستند، پس $\sim p \wedge \sim q$ نیز راست است.

(و) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\sim (p \wedge r)]$: یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده و یک کلمه دارای ۲ بایت است، یا یک بیت مساوی صفر و یک است؛ اما در عین حال چنین نیست که هم یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده و هم یک بیت مساوی صفر یا یک باشد.

برای بررسی راستی یا دروغ بودن گزاره، ابتدا دو گزاره $[(p \wedge q) \vee r]$ و $[\sim (p \wedge r)]$ را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم.

$[(p \wedge q) \vee r]$: $p \wedge q$ دروغ اما r راست است پس گزاره $[(p \wedge q) \vee r]$ راست است.

$[\sim (p \wedge r)]$: p دروغ و r راست است. لذا $p \wedge r$ دروغ و در نتیجه $[\sim (p \wedge r)]$ راست است.

حال، از اینکه $[(p \wedge q) \vee r]$ و $[\sim (p \wedge r)]$ هر دو راست هستند، نتیجه می‌شود که $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\sim (p \wedge r)]$ راست است.

۲- جدول درستی هر یک از گزاره‌های زیر را تشکیل دهید.

(الف) $\sim p \wedge q$ (ب) $p \vee \sim q$ (ج) $[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge [\sim p \vee \sim r]$

پاسخ:

(الف)

p	q	$\sim p \wedge q$			
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F

(ب)

p	q	$p \vee \sim q$			
T	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F

(ج)

p	q	r	$[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge [\sim p \vee \sim r]$											
T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T	F	F	T	
T	T	F	T	T	F	T	T	F	T	F	T	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T	F	T	F	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	F	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	F	T	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	T	F

۱ ۲ ۲ ۷ ۴ ۶ ۵

۵- کدام یک از گزاره‌های زیر، راستگو است؟

- (الف) $\sim(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$ (ب) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

پاسخ:

جدول درستی هر کدام را تشکیل می‌دهیم. اگر در ستون نهایی، هم عبارتهای T، گزاره راستگو و در غیر اینصورت گزاره دروغگو است.

(الف)

p	q	$\sim(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$								
T	T	F	T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T	F	T	F

۲ ۱ ۶ ۳ ۵ ۴

گزاره مورد بحث راستگو نیست. زیرا در ستون نهایی عبارت F وجود دارد.

(ب)

p	q	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$								
T	T	T	F	F	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F

۲ ۱ ۵ ۳ ۴

گزاره مورد بحث راستگو نیست. زیرا در ستون نهایی عبارت F وجود دارد.

۶- کدام یک از عبارات زیر هم ارز هستند؟

- (الف) $p \vee q$ و $q \vee p$ ✓
 (ب) $(p \vee q) \vee r$ و $p \vee (q \vee r)$ ✓
 (ج) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ و $p \wedge (q \vee r)$ ✓
 (د) $(p \wedge q) \vee r$ و $p \wedge (q \vee r)$ ✗
 (ه) $(p \vee q) \wedge r$ و $p \vee (q \wedge r)$ ✗
 (و) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ و $p \vee (q \wedge r)$ ✓
 (ز) $\sim p \wedge \sim q$ و $\sim(p \vee q)$ ✓
 (ح) $(p \vee \sim q) \vee \sim r$ و $p \vee \sim(q \wedge r)$ ✓

پاسخ:

(الف) با توجه به خاصیت جابجایی گزاره‌ها: $p \vee q \equiv q \vee p$

(ب) با توجه به خاصیت شرکتپذیری گزاره‌ها: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(ج) با توجه به خاصیت پخش پذیری گزاره‌ها: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$

تذکر: ارزش نهایی هر گزاره در ستونی که زیر آن با عدد ۲ شماره گذاری شده است، مشخص می شود.

هـ) جدول درستی گزاره های داده شده به صورت زیر است:

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$	r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F
			۱	۲

p	q	r	$p \vee (q \wedge r)$	r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F
			۲	۱

در سطرهایی که علامت گذاری شده اند، دو گزاره هم ارزش نمی باشند. لذا، دو گزاره مورد بحث هم ارزش نمی باشند.

د) جدول درستی دو گزاره داده شده، به صورت زیر است:

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$	r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F
			۱	۲

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F
			۲	۱

در دو سطری که علامت گذاری شده، گزاره ها هم ارزش نیستند. لذا، دو گزاره هم ارزش نمی باشند.

(و) بنا به خاصیت پخش پذیری گزاره‌ها: $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$
 (ز) با توجه به قوانین دمورگان: $\sim p \wedge \sim q = \sim (p \vee q)$

(ح)

خواص شرکت پذیری: $(p \vee \sim q) \vee \sim r \equiv p \vee (\sim q \vee \sim r)$

قانون دمورگان: $p \vee (\sim q \vee \sim r) \equiv p \vee \sim (q \wedge r)$

$\Rightarrow (p \vee \sim q) \vee \sim r \equiv p \vee \sim (q \wedge r)$

۷- نشان دهید که دستورهای زبان برنامه نویسی پاسکال ارائه شده در زیر هم‌ارز هستند.

(الف) $((n = 7) \text{ or } (a > 5)) \text{ and } (x = 0)$

$((n = 7) \text{ and } (x = 0)) \text{ or } ((a > 5) \text{ and } (x = 0))$

(ب) $(n = 7) \text{ or } (\text{not } ((a \leq 5) \text{ and } (x = 0)))$

$((n = 7) \text{ or } (a > 5)) \text{ or } (x > 0)$

پاسخ:

(الف) گزاره‌های p, q, r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$n = 7 : p$

$a > 5 : q$

$x = 0 : r$

در این صورت دستورهای داده شده بطور معادل به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$(p \vee q) \wedge r$
 $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

اما، با توجه به خاصیت پخش پذیری گزاره‌ها، دو گزاره بالا هم‌ارز هستند. پس دستورهای زبان پاسکال داده شده نیز هم‌ارز می‌باشند.

(ب) p, q, r را مانند الف در نظر می‌گیریم. در این صورت دستورهای داده شده بطور معادل به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$p \vee (\sim (\sim q \wedge r))$
 $(p \vee q) \vee \sim r$

گزاره اول با توجه به قانون دمورگان هم‌ارز است با:

$p \vee (q \vee \sim r)$

حال با توجه به خواص شرکت پذیری گزاره‌ها، گزاره حاصل نیز هم‌ارز است با:

$(p \vee q) \vee \sim r$

در نتیجه دستورهای داده شده نیز هم‌ارز می‌باشند.

۸- عبارات منطقی زیر به صورت ترکیبات فصلی از ترکیبات عطفی عبارات ساده، بنویسید.

(الف) $(x = 0) \text{ and } (\text{not } (n = 7) \text{ and } (a < 5))$

(ب) $(x = 0) \text{ or } (\text{not } ((n > 7) \text{ or } (a = 5)))$

(ج) $(n = 7) \text{ or } (\text{not } ((a \leq 5) \text{ and } (x = 0)))$

(د) $((n < 7) \text{ or } (x = 0)) \text{ and } ((a < 5) \text{ or } (x = 0))$

پاسخ:

گزاره‌های p, q, r, s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x = 0 : p$

$n = 7 : q$

$n > 7 : r$

$a < 5 : s$

$a = 5 : t$

در این صورت داریم:

(الف) $p \wedge (\sim q \wedge s)$

(ب) $p \vee [\sim (r \vee t)]$

(ج) $q \vee [\sim ((s \vee t) \wedge p)]$

(د) $(\sim q \vee p) \wedge (s \vee p)$

۹- نشان دهید که $p \rightarrow q$ هم‌ارز با گزاره‌های زیر است.

(الف) $\sim p \vee q$ (ب) $\sim q \rightarrow \sim p$ (ج) $\sim (p \wedge \sim q)$

پاسخ:

جدول درستی هر چهار گزاره را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(الف)

p	q	$\sim p$	\vee	q
T	T	F	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

۱ ۲

(ب)

p	q	$\sim q$	\rightarrow	$\sim p$
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

۱ ۳ ۲

(ج)

p	q	$\sim (p \wedge \sim q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

۳ ۲ ۱

با مقایسه جدول درستی هر چهار گزاره مشخص می شود که $p \rightarrow q$ با هر سه گزاره که در الف و ب و ج آمده است هم ارز می باشد.

۱۰- در هر یک از عبارات زیر مقدم و تالی را مشخص کنید .

(الف) برای رئیس جمهور شدن ، کافی است یک سیاستمدار بود.

(ب) برای رئیس جمهور شدن ، لازم است یک سیاستمدار بود.

(ج) شرط لازم برای درک علم کامپیوتر ، داشتن دانش کافی در ریاضیات گسسته است.

(د) این برنامه اجرا خواهد شد ، تنها اگر ، اشتباهی در تایپ کردن آن وجود نداشته باشد.

پاسخ :

گزاره $p \rightarrow q$ ، به طرق مختلف بیان می شود که معمول ترین آنها عبارتند از :
 « اگر p آنگاه q » ، « اگر q اگر p » ، « p تنها اگر q » ، « p شرط کافی برای q است. » و « q شرط لازم برای p است. » که در همه عبارتها p مقدم و q تالی است.

(الف)

مقدم : سیاستمدار بودن.

تالی : رئیس جمهور بودن.

(ب)

مقدم : رئیس جمهور بودن.

تالی : سیاستمدار بودن.

(ج)

مقدم : درک علم کامپیوتر.

تالی : داشتن دانش کافی در ریاضیات گسسته.

(د)

مقدم : این برنامه اجرا خواهد شد .

تالی : اشتباهی در تایپ برنامه وجود نداشته باشد .

p	q	r	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$					
T	T	T	T	T	T	T	T	
T	T	F	T	F	T	F	F	
T	F	T	T	F	F	F	T	
T	F	F	T	T	F	T	F	
F	T	T	F	F	T	T	T	
F	T	F	F	T	T	F	F	
F	F	T	F	T	F	F	T	
F	F	F	F	F	F	T	F	

(ج)

p	q	$(p \wedge \sim p) \rightarrow q$					
T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F

(د)

۱۱- جدول درستی هر یک از گزاره‌ها زیر را تشکیل دهید.

- (الف) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
- (ب) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
- (ج) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
- (د) $(p \wedge \sim p) \rightarrow q$

پاسخ:

(الف)

p	q	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$						
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	F	T	F
F	T	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F	T	F

(ب)

p	q	r	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$					
T	T	T	T	T	T	T	T	
T	T	F	F	T	T	F	F	
T	F	T	T	F	F	F	T	
T	F	F	F	F	T	T	F	
F	T	T	F	F	T	F	T	
F	T	F	F	F	T	T	F	
F	F	T	F	T	F	T	T	
F	F	F	F	T	F	F	F	

۱۲- با استفاده از گزاره‌های دو شرطی، مشخص کنید که کدام یک از زوج گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند.

- (الف) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ و $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ ✗
- (ب) $(p \wedge q) \vee r$ و $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ ✓
- (ج) $p \leftrightarrow q$ و $\sim p \rightarrow \sim q$ ✗
- (د) $p \leftrightarrow q$ و $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ✓

پاسخ: Ⓛ

الف) جدول درستی $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$ را تشکیل می‌دهیم:

p	q	r	$[(p \rightarrow q) \rightarrow r]$						$[(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$				
T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F	F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	T	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F	T	T	T	F	F	T	F	T
F	F	F	F	T	F	F	F	F	F	F	T	F	T

۱ ۲ ۶ ۴ ۳ ۵

با توجه به جدول درستی فوق، دو گزاره $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ و $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ هم‌ارز نیستند.

ب) جدول درستی $[(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$ را تشکیل می‌دهیم:

p	q	r	$[(p \wedge q) \vee r]$						$[(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$					
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T	F	T	T	F	
T	F	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	F	T	
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F	
F	T	T	F	F	T	T	T	T	F	T	T	T	T	
F	T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F	T	F	
F	F	T	F	F	F	T	T	T	F	T	T	F	T	
F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	F	F	

۱ ۲ ۶ ۳ ۵ ۴

با توجه به جدول درستی فوق، داریم:

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

ج) جدول درستی گزاره $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$ را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$				$(\sim p \rightarrow \sim q)$			
T	T	T	T	T	T	F	T	T	F
T	F	T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T	T	F	T	F

۱ ۵ ۲ ۴ ۳

از جدول درستی بالا روشن است که دو گزاره مورد بحث هم‌ارز نیستند.

$$p \vee q, \sim p \vdash q$$

(ب)

گزاره‌ها	دلایل
۱ $p \vee q$	فرض
۲ $\sim p \rightarrow q$	هم‌ارز ۱
۳ $\sim p$	فرض
۴ q	قیاس استثنایی ۲ و ۳

ج) در صورت مسئله نتیجه اشتباهاً q تایپ شده که صورت صحیح آن s است. (توجه کنید که بنا به فرض $p \wedge \sim q$ صحیح است. پس $\sim q$ نیز صحیح بوده، پس q نادرست است.)

$$p \rightarrow r, r \rightarrow (s \vee q) \vdash s$$

گزاره‌ها	دلایل
۱ $p \wedge \sim q$	فرض
۲ p	قیاس تخصیص ۱
۳ $\sim q$	قیاس تخصیص ۱
۴ $p \rightarrow r$	فرض
۵ r	قیاس استثنایی ۲ و ۴
۶ $r \rightarrow (s \vee q)$	فرض
۷ $s \vee q$	قیاس استثنایی ۵ و ۶
۸ $\sim q \rightarrow s$	هم‌ارز ۷
۹ s	قیاس استثنایی ۳ و ۸

د) جدول درستی $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$ را تشکیل می‌دهیم.

p	q	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$															
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	T	F	F	F	F	T	T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	F	T	F	T	F	F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T	F	F	F	T	T	F	T	T	F	T	T	F
		۶	۷	۱	۵	۲	۴	۳									

با توجه به جدول درستی فوق

$$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$$

۱۳- بدون استفاده از جدول درستی، نشان دهید که قیاس‌های زیر معتبر هستند.

- الف) p و $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow r \vdash r$
- ب) $p \vee q$ و $\sim p \vdash q$
- ج) $p \wedge \sim q$ و $p \rightarrow r$ و $r \rightarrow (s \vee q) \vdash s$
- د) $p \leftrightarrow q$ و $\sim p \rightarrow r$ و $\sim r \vdash q$
- هـ) $p \vee q$ و $\sim q \vee r \vdash p \vee r$
- و) $p \leftrightarrow q$ و $q \leftrightarrow r \vdash p \leftrightarrow r$
- ز) p و $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p \vdash p \rightarrow q$
- ح) p و q و $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash r$

پاسخ:

الف:

گزاره‌ها	دلایل
۱ p	فرض
۲ $p \rightarrow q$	فرض
۳ q	قیاس استثنایی (۱ و ۲)
۴ $q \rightarrow r$	فرض
۵ r	قیاس استثنایی (۳ و ۴)

$$p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r \vdash p \leftrightarrow r \quad (و)$$

گزاره‌ها	دلایل
۱ $p \leftrightarrow q$	فرض
۲ $p \rightarrow q$	قیاس تخصیص ۱
۳ $q \rightarrow p$	قیاس تخصیص ۱
۴ $q \leftrightarrow r$	فرض
۵ $q \rightarrow r$	قیاس تخصیص ۴
۶ $r \rightarrow q$	قیاس تخصیص ۴
۷ $p \rightarrow r$	قیاس تعدی ۵ و ۲
۸ $r \rightarrow p$	قیاس تعدی ۳
۹ $p \leftrightarrow r$	قیاس عطف ۷ و ۸

$$p, (p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p \vdash p \rightarrow q \quad (ز) \quad M$$

گزاره‌ها	دلایل
۱ p	فرض
۲ $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$	فرض
۳ $p \rightarrow (\sim p \vee q)$	عکس نقیض ۲ و قانون دمورگان
۴ $\sim p \vee q$	قیاس استثنایی او ۳
۵ $p \rightarrow q$	هم‌ارز ۴

$$p, q, (p \wedge q) \rightarrow r \vdash r \quad (ج)$$

گزاره‌ها	دلایل
۱ p	فرض
۲ q	فرض
۳ $p \wedge q$	قیاس عطف او ۲
۴ $(p \wedge q) \rightarrow r$	فرض
۵ r	قیاس استثنایی او ۳ و ۴

$$p \leftrightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim r \vdash q \quad (د)$$

گزاره‌ها	دلایل
۱ $p \leftrightarrow q$	فرض
۲ $p \rightarrow q$	قیاس تخصیص ۱
۳ $\sim q \rightarrow \sim p$	عکس نقیض ۲
۴ $\sim p \rightarrow r$	فرض
۵ $\sim q \rightarrow r$	قیاس تعدی ۳ و ۴
۶ $\sim r \rightarrow q$	عکس نقیض ۵
۷ $\sim r$	فرض
۸ q	قیاس استثنایی او ۶ و ۷

$$p \vee q, \sim q \vee r \vdash p \vee r \quad (ه) \quad M$$

گزاره‌ها	دلایل
۱ $p \vee q$	فرض
۲ $\sim p \rightarrow q$	هم‌ارز ۱
۳ $\sim q \vee r$	فرض
۴ $q \rightarrow r$	هم‌ارز ۳
۵ $\sim p \rightarrow r$	قیاس تعدی او ۲ و ۴
۶ $p \vee r$	نقیض دوگانه

۱۴- استدلال‌های زیر را تحلیل کرده و بگویید کدام یک معتبر است ؟

(الف) اگر ماشین تازه‌ای بخرم ، زمستان قادر خواهم بود که به مشهد بروم. چون، زمستان به مشهد نمی‌روم ، ماشین تازه‌ای نخواهم خرید.

(ب) اگر کاری پیدا و سخت کار کنم، ترقی خواهم کرد. من ترقی نکردم، بنابراین، یا کار پیدا نکردم و یا سخت کار نکردم .

(ج) اگر کاری پیدا و سخت کار کنم ، ترقی خواهم کرد. من ترقی کرده‌ام ، بنابراین ، کاری پیدا کرده‌ام .

(د) یا در درس ساختمانهای گسسته نمره عالی خواهم گرفت و یا قبول نخواهم شد . اگر قبول نشوم به خدمت سربازی خواهم رفت . نمره عالی گرفته‌ام ، بنابراین ، به خدمت سربازی نخواهم رفت .

(ه) یا در درس ساختمانهای گسسته نمره عالی خواهم گرفت یا قبول نخواهم شد. اگر قبول نشوم به خدمت سربازی خواهم رفت . نمره متوسط گرفته‌ام ، بنابراین ، به خدمت سربازی خواهم رفت .

پاسخ :

(الف) گزاره‌های p, q, r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم .

p : ماشین تازه‌ای می‌خرم .

q : زمستان به مشهد می‌روم .

حال باید درستی قیاس زیر را بررسی کنیم :

$$p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$$

قیاس فوق نیز معتبر است، زیرا :

گزاره‌ها	دلایل
۱ $p \rightarrow q$	فرض
۲ $\sim q$	فرض
۳ $\sim p$	قیاس عکس ۱و۲

پس ، استدلال مورد بحث معتبر است.

(ب) گزاره‌های r, q, p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

p : کار پیدا می‌کنم.

q : سخت کار می‌کنم .

r : ترقی خواهم کرد.

حال اعتبار قیاس زیر را بررسی می‌کنیم :

$$(p \wedge q) \rightarrow r \text{ و } \sim r \vdash \sim p \vee \sim q$$

گزاره‌ها	دلایل
۱ $(p \wedge q) \rightarrow r$	فرض
۲ $\sim r$	فرض
۳ $\sim p \vee \sim q$	قیاس عکس (۱و۲) و قانون دمورگان

پس ، استدلال مورد بحث معتبر است .

(ج) گزاره‌های r, q, p را مانند (ب) تعریف می‌کنیم. باید اعتبار قیاس زیر را بررسی کنیم.

$$(p \wedge q) \rightarrow r \text{ و } r \vdash P \quad *$$

برای اینکه نشان دهیم قیاس فوق معتبر نیست، کفایت با توجه به جدول درستی

نشان دهیم که گزاره زیر یک گزاره راستگو نمی‌باشد .

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge r \rightarrow p$$

p	q	r	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge r \rightarrow p$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

۱ ۲ ۳ ۴

۱۵- جدول درستی هر یک از گزاره‌های زیر را تشکیل دهید.

(الف) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
 (ب) $[\sim q \rightarrow \sim p] \rightarrow (p \rightarrow q)$

پاسخ:

(الف)

p	q	r	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$											
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T	T	F	T	F
T	F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	F

۲ ۱ ۶ ۳ ۵ ۴

p	q	$[\sim q \rightarrow \sim p] \rightarrow (p \rightarrow q)$							
T	T	F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	F	T	F	F

۱ ۳ ۲ ۵ ۴

با توجه به دو سطر نشان داده شده، گزاره $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge r \rightarrow p$ راستگو نمی‌باشد. پس قیاس* معتبر نیست. بنابراین استدلال (ج) معتبر نمی‌باشد.

(د) گزاره‌های p, q, r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

p : در درس ساختمان گسسته نمره عالی خواهم گرفت.

q : قبول نخواهم شد.

r : به خدمت سربازی خواهم رفت.

حال اعتبار قیاس زیر را بررسی می‌کنیم:

$p \vee q, q \rightarrow r, p \vdash \sim r$

مانند (ج) می‌توان نشان داد که گزاره $[(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p] \rightarrow \sim r$ راستگو نیست. بنابراین، قیاس مورد نظر معتبر نمی‌باشد.

تذکر: استدلال (د) در صورتی معتبر است که گزاره زیر را نیز به استدلال اضافه کنیم:

اگر نمره عالی بگیرم، به سربازی نخواهم رفت.

ه) گزاره‌های p, q, r را مانند (د) تعریف کرده، گزاره s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

s : نمره متوسط گرفته‌ام.

باید اعتبار قیاس زیر را بررسی کنیم:

$p \vee q, q \rightarrow r, s \vdash r$

مجدداً مانند (ج) می‌توان نشان داد که گزاره زیر راستگو نیست.

$[(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge s] \rightarrow r$

لذا، استدلال مورد بحث معتبر نمی‌باشد.

۱۸- ثابت کنید که استدلال زیر معتبر است :

- اگر علی در فرانسه زندگی نکند ، آنگاه نخواهد توانست فرانسه صحبت کند.

- علی نمی تواند ماشین کادیلک براند.

- اگر علی در فرانسه زندگی کند ، آنگاه وی دوچرخه سواری خواهد کرد.

- با علی فرانسه صحبت می کند ، یا کادیلک می راند.

بنابراین ، علی دوچرخه سواری می کند.

پاسخ :

گزاره های s, r, q, p را به صورت زیر تعریف می کنیم :

p : علی در فرانسه زندگی می کند .

q : علی می تواند فرانسه صحبت کند .

r : علی می تواند ماشین کادیلک براند .

s : علی دوچرخه سواری می کند .

کافیست نشان دهیم قیاس زیر معتبر است .

$$\sim p \rightarrow \sim q, \sim r, p \rightarrow s, q \vee r \vdash s$$

گزاره ها	دلایل
۱ $\sim p \rightarrow \sim q$	فرض
۲ $q \rightarrow p$	عکس نقیض ۱
۳ $q \vee r$	فرض
۴ $\sim r \rightarrow q$	هم ارز ۳
۵ $\sim r$	فرض
۶ q	قیاس استثنایی ۴ و ۵
۷ p	قیاس استثنایی ۲ و ۶
۸ $p \rightarrow s$	فرض
۹ s	قیاس استثنایی ۷ و ۸

لذا ، قیاس مورد بحث معتبر است .

۱۶- با فرض آنکه

p : « هوا خوب است ».

q : « علی به کوه می رود ».

گزاره های نمادین زیر را به زبان فارسی بنویسید :

(الف) $\sim q \rightarrow \sim p$ (ب) $p \wedge \sim q$ (ج) $p \leftrightarrow q$

پاسخ :

(الف) اگر علی به کوه نرود آنگاه هوا خوب نبوده است .

(ب) هوا خوب است و علی به کوه نمی رود .

(ج) شرط لازم و کافی برای آنکه علی به کوه برود آنست که هوا خوب باشد .

۱۷- نشان دهید که اگر $q \vdash p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ ، آنگاه

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \vdash (p \rightarrow q)$$

پاسخ :

گزاره r را به صورت $r \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ تعریف می کنیم . در این صورت

کافیست نشان دهیم که اگر $r \wedge q \vdash q$ آنگاه $r \vdash (p \rightarrow q)$. به عبارتی باید

نشان دهیم که گزاره زیر راستگو است :

$$[(r \wedge p) \rightarrow q] \rightarrow [r \rightarrow (p \rightarrow q)]$$

*

جدول درستی گزاره فوق به صورت زیر است :

p	q	r	$[(r \wedge p) \rightarrow q]$	$r \rightarrow (p \rightarrow q)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	T

۱ ۲ ۵ ۴ ۳

بنابراین ، گزاره * راستگو بوده و حکم تمام است .

۱۹- نشان دهید: $\sim r \rightarrow (s \rightarrow \sim t)$ ، $\sim r \vee w$ ، $\sim p \rightarrow s$ ، $\sim w \mid - t \rightarrow p$
 پاسخ:

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$\sim r \vee w$	فرض
۲	$\sim w \rightarrow \sim r$	هم‌ارز ۱
۳	$\sim w$	فرض
۴	$\sim r$	قیاس استثنایی ۳ و ۲
۵	$\sim r \rightarrow (s \rightarrow \sim t)$	فرض
۶	$s \rightarrow \sim t$	قیاس استثنایی ۵ و ۴
۷	$\sim p \rightarrow s$	فرض
۸	$\sim p \rightarrow \sim t$	قیاس تعدی ۶ و ۷
۹	$t \rightarrow p$	عکس نقیض ۸

۲۰- نتیجه‌ای برای مجموعه جملات زیر ارائه دهید:
 - همه مربع‌ها، مستطیل هستند.
 - همه مستطیل‌ها، متوازی‌الاضلاع هستند.
 - همه متوازی‌الاضلاع‌ها، چهارضلعی هستند.

بنابراین ...؟

پاسخ:

همه مربع‌ها چهارضلعی هستند، زیرا:
 $p(x)$: x مربع است.
 $Q(x)$: x مستطیل است.
 $R(x)$: x متوازی‌الاضلاع است.
 $S(x)$: x چهارضلعی است.

با توجه به فرضهای مسئله باید نشان دهیم قیاس زیر معتبر است:

$$\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$$

$$\forall x [Q(x) \rightarrow R(x)]$$

$$\forall x [P(x) \rightarrow S(x)]$$

$$\forall x [P(x) \rightarrow S(x)]$$