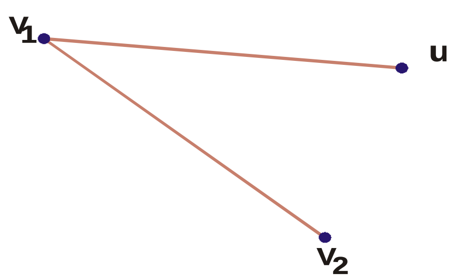
مقدمه:

همانطور که گفته شد گراف G با مجموعه رئـوس آن (V) و مجموعــه یالهــای آن (E) نــشان داده می‌شود. لذا برای نگه داری یک گراف خاص تنها داشتن این دو کفایت می کند.

به عنوان نمونه اگر $V(G)=\{v_1,u,v_2\}$

$,E(G)=\{\{v_1,u\},\{v_1,v_2\}\}$

آنگاه تنها یک گراف متناظر با آنها وجود خواهد داشت که به صورت زیر می توان آن را نشان داد:



البته می دانیم که نحوه کشیدن یک گراف یکتا نمی باشد یعنی هر گراف را به طرق متفاوتی می توان رسم نمود و تنها چیزی که یکتاست، وجود یا نبود یالها بین رئوس مشخص می باشد.

منظور از نحوه نگه داری گراف نیز نگه داری و ذخیره عناصر مشخصی از گراف می باشد که به کمــک آنها بتوان فقط و فقط یک گراف متناظر با آن را بازیابی کرد.

به جز روش گفته شده سه روش مشهود و پر کاربرد دیگر بخصوص در برنامه های کامپیوتری موجــود

باشند که به اختصار به آنها می پردازیم:

- ماتریس مجاورت
- ماتریس وقوع
- لیست مجاورت

مسیرها و دورها:

چه بسا مسیر پرپیچ و خم با پرتگاههای عمیق که در سر راه زندگی طی می گردند.

اکنون به مفهوم بسیار ملموسی درگراف خواهیم پرداخت و آن عبارت خواهد بود از مفهوم ″ رفــتن از یک راس به راس دیگر″ به عبارتی حرکت کردن روی یالها.

راسها و یالها همانطور که انتظار می رود نشان دهنده ایستگاهها و ارتباط هایی میان آنهاست کــه در این میان این موضوع که آیا راهی میان دو راس مفروض وجود دارد یا نه می تواند پر ارزش و با معنا باشد.

اما تعریف ها:

یک گشت در گراف G را این گونه تعریف می کنیم:

دنباله ای از رئوس به صورت

$v_0 v_1 v_2 .. v_m$

که به ازای هر $0 \le i \le m-1$ داشته باشیم $v_i v_{i+1} \in E$

این تعریف برای تمام گراف ها اعم از ساده و چندگانه و جهت دار برقرار است.

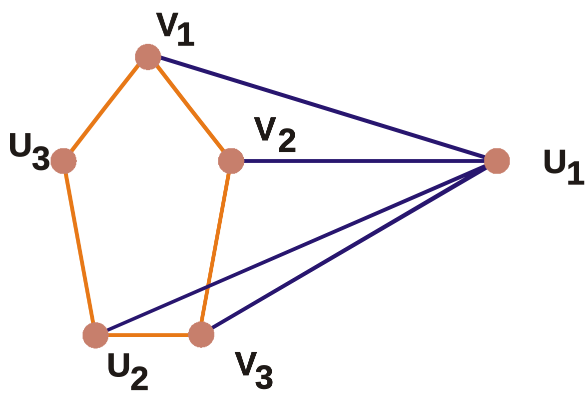
بدیهی است که $v_i v_{i+1}$ و $v_{i+1} v_{i+1}$ یالهای منتهی به راس v_i می باشند که در دنبالــه داده شــده مــی توانند پشت سر هم بیایند. (دو یال متوالی در دنباله یک گشت یا مجاور یا یکسان می باشند)

دقت کنید در یک گشت به صورت

$v_0 v_1 v_2 ... v_m$

که آن را گشتی ما بین v_m, v_0 تعریف می کنیم، هم رئوس می توانند تکراری باشند هم یالها.

مثال. در گراف زیر دنباله



$v_1 u_1 u_2 u_1 u_2 v_2 v_3$

یک گشت ما بین v_3, v_1 می باشد که رئوس u_1, u_2 در آن تکرار شده اند و یال $u_1 u_2$ هم 4 بار پیموده شده است.

- دقت کنید هر دنباله دلخواهی از رئوس نمی تواند یک گشت باشد زیرا باید هر دو راس متوالی در دنباله نشان گر یک یال باشند.

تعریف. طول یک گشت شامل m راس به صورت $v_0 v_1 v_2 \ldots v_m$ برابر با $(m-1)$ می گیرند و بیانگر تعداد یالهایی است که این گشت می پیماید.

تعریف. گشت بسته. اگر در یک گشت رئوس ابتدا و انتهای آن یکسان می باشند یعنی به صورت

$v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_m = v_1$

باشد آن را یک گشت بسته می نامیم و بیانگر حرکتی روی یالها می باشد که در انتها به راس آغازین بازگشته ایم.

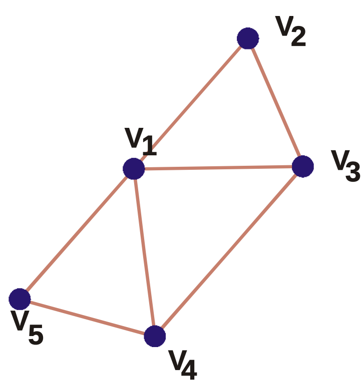
تعریف. گذر. اگر در تعریف گشت این شرط را هم اضافه کنیم که یال تکراری نداشته باشیم آن را گذر می نامیم.

به عبارتی دیگر گذرگشتی است که یال تکراری ندارد.

طول گذر و رئوس ابتدایی و پایانی گذر نیز مانند گشت می باشد.

تعریف. گذر بسته. مانند گشت بسته، به گذری بسته می گویند که رئوس ابتدایی و انتهایی آن یکسان باشند.

مثلاً در شکل زیر $v_1v_2v_3$ یک گذر و $v_1v_2v_3v_1v_4v_5v_1$ یک گذر بسته می باشد.



تعریف. مسیر. اگر علاوه بر یالها، رئوس یک گشت هم غیر تکراری باشند آن را مسیر می نامند.

به عبارت دیگر مسیر گذری با رئوس تکراری می باشد.

تعریف. دور. در مسیر $v_1,v_2,\ldots,v_m,v_{m+1}$ اگر $v_1=v_{m+1}$ باشد آن را یک دور می نامیم. (درست است که قرار شد در مسیر راس تکراری نداشته باشیم ولیکن تنها استثنای این قاعده تعریف دور می باشد،

دقت کنید در یک دور ما در حقیقت راس تکراری نداریم! و هر راس آن دقیقاً یکبار در دور ظاهر مـــی شـــود ولیکن برای آن در هنگام نوشتن دور به صورت خطی بتوانیم دور بودن آن را مـــشخص کنـــیم یعنـــی نـــشان بدهیم که بعد از راس آخر هم دوباره به راس اول بازگشته ایم مجبوریم راس اول را دوبـــار در دنبالـــه ظـــاهر کنیم).

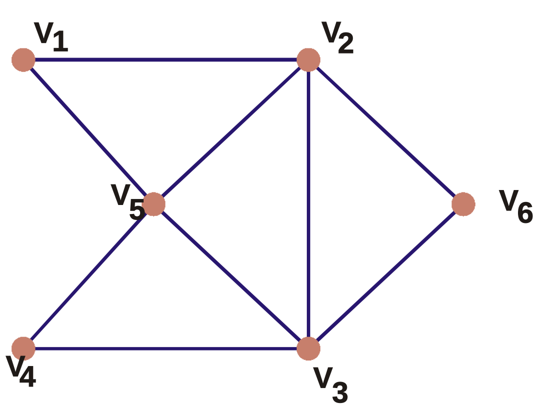
دقت کنید، از آنجا که گشت و گذر مفاهیم بسیار کلی می باشند، ما غالباً با مسیرها و دورها که حالت بسته آنها می باشند سر و کار خواهیم داشت.

یک دور با 3 راس را مثلث می‌نامند، به نظر شما چرا؟!

تعریف. طول دور. طول یک دور با m راس به صورت $v_1v_2...v_mv_1$ را برابر با m مـــی گیرنـــد و بیـــانگر تعداد یالهای آن می باشد.

مثال.

در شکل روبه رو به مسیر، دور و گشت و گذرهای زیر توجه کنید.



یک مسیر از v_1 به v_2 : $v_1v_5v_3v_2$

یک گشت از v_1 به v_2: $v_1v_5v_1v_2$

یک گذر از v_1 به v_2: $v_1v_5v_3v_4v_5v_2$

و یک دور : $v_1v_2v_5v_1$

- ثابت کنید هر مسیر یک گذر و هر گذر یک گشت می باشد. (به عنوان تمرین)
- ثابت کنید هر دور یک گذر بسته و هر گذر بسته یک گشت بسته مـــی باشـــد (بـــه عنـــوان

تمرین)

- **ثابت کنید اگر گشت (u,v) موجود باشد آنگاه مسیر (u,v) هم وجود خواهد داشت.**

اثبات. در گشت (u,v) ما به ازای هر بار تکرار w به صورت

$$\underbrace{uu_1..u_iwu_{i+1}..u_jwu_{j+1}..v}$$

گشت بسته

یک گشت بسته خواهیم داشت که با حذف آن قسمت خللی به ارتباط v,u نخواهد خورد

$$\rightarrow uu_1..u_iwu_{j+1}..v$$

و با ادامه این کار سرانجام به جایی خواهیم رسید که هیچ راس تکراری نخواهیم داشت.

در تمرین بعد هم ثابت می کنیم در هر گشتی که راس تکراری نداشته باشیم، یال تکراری هم نخواهیم داشت پس آنچه می ماند یک مسیر (u,v) است.

- **ثابت کنید هر گشت با رئوس غیر تکراری یک مسیر است.**

تنها چیزی که نیاز داریم این است که ثابت کنیم یال تکراری هم ندارد.

برهان خلف. اگر یال uv در دنباله گشت $w_0w_1..w_m$

تکرار شده باشد بدیهی است لااقل یکی از رئوس هم تکراری در این دنباله ظاهر خواهد شد و این بافرض سوال تناقض دارد.

به ادامه مباحث مسیرها و دورها در مبحث همبندی خواهیم پرداخت.

درجه راسها:

اگر $v \in V(G)$ باشد درجه راس v را به طور ساده تعداد یالهایی تعریف می کنیم که v بر آنها واقع است.

تبصره. در گراف های چندگانه طوقه را دوبار در درجه راس مربوط به حساب می آوریم.

- $d(G)$.کوچکترین درجه در گراف G را $d(G)$ تعریف می کنیم (بخوانید دلتای کوچک G)
- $\Delta(G)$. بزرگترین درجه در گراف G را $\Delta(G)$ تعریف می کنیم (بخوانید دلتای بزرگ G)

درجه راس v را با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می دهیم.

قضیه. در هر گراف G با مجموعه رئوس (v) که G ساده باشد داریم:

$$\forall_{v \in V} : 0 \le d(v) < |V|$$

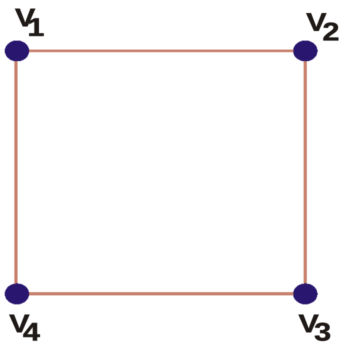
اثبات. به آسانی ثابت می شود، زیرا حداقل درجه هر راس می تواند صفر باشد یعنی به هیچ راس دیگری متصل نباشد و حداکثر درجه هر راس هم می تواند $|V| - 1$ باشد یعنی به همه متصل باشد (دقت کنید گراف ساده بوده پس بین هر دو راس حداکثر یک یال وجود خواهد داشت)

لذا به آسانی دیده می شود:

$$0 \le d(G) \le d(V) \le \Delta G \le |V| - 1$$

تمرین. گرافی مثال بزنید که به ازای هر $v \in V$ داشته باشیم: $d(G) = d(v) = \Delta(G)$

به راحتی :



$$\forall_{v_i \in V} : d(G) = d(V_i) = D(G) = 2$$

قضیه. در گراف ساده G ثابت کنید $\sum_{v \in V(G)} d(V) = 2 \times |E|$

یعنی مجموع درجات برابر است با دو برابر تعداد یالها

اثبات. تعداد یالها را به دو گونه می شماریم، یکی تعداد یالها یعنی $|E|$ بوده و دومی اینکه هــر یــالی ابتدا و انتها دارد که به ازای هر سر آن درجه یک راس را یک واحد افزایش داده، پــس اگــر مجمــوع تمــام درجات رئوس را حساب کنیم هریال دقیقاً دو بار شمرده می شود و این یعنی دو برابر تعداد یالها می گــردد. پس

$$\sum_{v \in V(G)} d(V) = 2 \times |E|$$

نتیجه. مجموع درجات هر گراف G زوج می باشد.

به وضوح از قضیه قبل نتیجه می گردد.

قضیه. تعداد رئوس درجه فرد گراف G ، زوج می باشد.

برهان خلف. اگر تعداد رئوس درجه فرد گراف G فرد باشد،آنگاه مجموع درجات آنها عددی فرد می شود که با افزودن سایر درجه های زوج به عدد فرد باز هم مجموع درجات فرد باقی می ماند پس مجموع کل

درجات گراف فرد می شود که مخالف با نتیجه قبل می باشد.

تعریف. دنباله درجات رئوس.

به دنباله ای که از پشت سر هم قرار دادن درجات رئوس گراف G بدست می آید.

دنباله درجات رئوس گراف G می گویند.

مثال. (2 و 2 و 3 و 2 و 1)

ضمناً غالباً دنباله درجات رئوس را به ترتیب صعودی مرتب می کنند.

تعریف. دنباله گرافیکی. به هر دنباله از اعداد طبیعی مانند $(a_1,a_2,...,a_n)$ که گرافی وجود داشته باشد که دنباله درجات رئوس آن برابر با این دنباله شود دنباله گرافیکی گویند مانند (2و2و3و 2و1) که در تمرین قبل دیدیم گرافی وجود دارد که دنباله درجات رئوس آن برابر با این دنباله شود.

حال سوالی که اینجا مطرح می شود این است که آیا هر دنباله اعدادی یک دنباله گرافیکی است؟

واضح است که خیر- پس چه دنباله اعدادی دنباله گرافیکی خواهند بود؟

نخست شروط لازم برای گرافیکی بودن دنباله را بررسی می کنیم.

1. در دنباله داده شده $0 \le d(G) \le \Delta(G) < |V|$.

تمرین. آیا دنباله (4و2و1و1) دنباله گرافیکی است.

جواب. خیر زیرا از تعداد اعداد معلوم است که گراف باید 4 راس داشته باشد ولی چون بزرگترین درجه آن 4 بوده و کوچکتر از تعداد رئوس نیست این دنباله گرافیکی نیست.

2. تعداد درجات فرد، زوج می باشد.

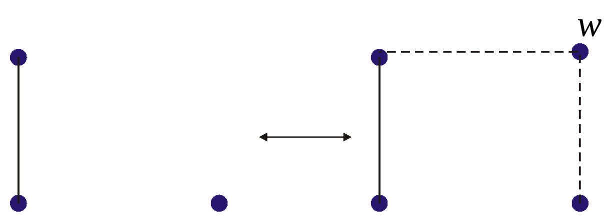
تمرین. آیا دنباله (4و3و3و2و1و1و1) می تواند گرافیکی باشد؟

جواب. خیر.

تمرین. آیا گرافی وجود دارد که لااقل دو راس آن درجه $|V|-1$ باشد

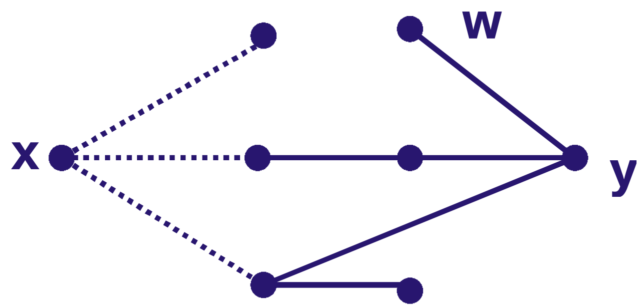
جواب. به سادگی بلی، در گراف کامل K_n درجه تمام رئوس $|V|-1$می باشد.

مثال. یک شرط بازگشتی. فهرست 2،0،0 گرافیکی نیست، اما 2،2،1،1 گرافیکی است، همـین طـور 1،0،1 گراف k_2+k_1، 1،0،1 را محقق می سازد؛ اگر راس جدیدی را مجاور با راس تنها و یک راس درجه 1 اضافه کنیم، آنگاه یک گراف با دنباله درجه های 2،2،1،1 به دست می آوریم (تصویر زیر). برعکس، اگـر یک گراف داشته باشیم 2،2،1،1 را محقق سازد و در آن راسی مانند w از درجه ماکسیمم مجاور با راسهای از درجه 2 و 1 باشد،آنگاه می توانیم w را برای به دست آوردن یک گراف با فهرسـت درجـه هـای 1،0،1 حذف کنیم.



این ملاحظات یک آزمون بازگشتی را برای دنباله های گرافیکی ارائه می دهد. بـرای آزمـون دنبالـه 33333221 ، می توانیم تحقق سازی را با راسی مانند y از درجه 3 جستجو کنیم که دارای سه همسایه از درجه 3 باشد. چنین گرافی وجود دارد اگر، و فقط اگر، 2223221 گرافیکی باشد (به وسیله حذف y). این

را دوباره به صورت **3222221** مرتب می کنیم و تحقق سازی را با راسی مانند x از درجه **3** جستجو می کنیم که دارای سه همسایه از درجه **2** باشد. چنین گرافی وجود دارد اگر، **111221** مرتب می کنیم و تحقق سازی را با راسی مانند x از درجه **3** جستجو می کنیم که دارای سه همسایه از درجه **2** باشد. چنین گرافی وجود دارد اگر، و فقط اگر، **111221** گرافیکی باشد(به وسیله حذف x). این را دوباره به صورت **221111** مرتب می کنیم و تحقق سازی را با راسی مانند w از درجه **2** با همسایه های درجه **2** و **1** جستجو می کنیم. چنین گرافی وجود دارد اگر و فقط اگر، **10111** گرافیکی باشد. شاید بتوان تشخیص داد که این واقعاً گرافیکی است. با آغاز یک تحقق سازی از **10111**،می توانیم y, x, w را با ویژگیهای مطلوب برای به دست آوردن یک تحقق سازی از دنباله اولیه **33333221** جایگزین کنیم. تحقق سازی یکتا نیست.



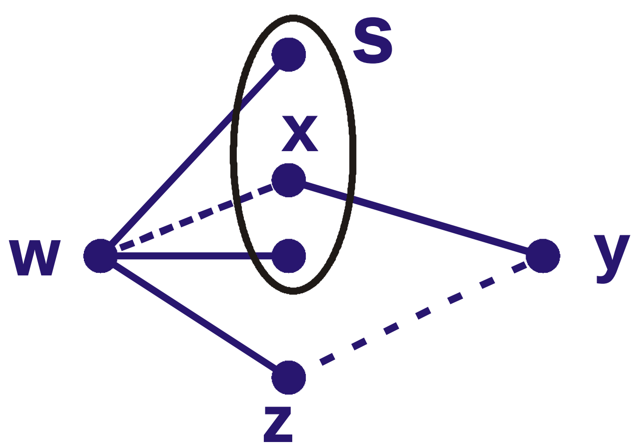
قضیه. (هاول [1955] ، حکیمی [1962]) برای $n>1$، فهرست اعداد صحیح نامنفی d با اندازه n گرافیکی است اگر، و فقط اگر، d' گرافیکی باشد، در حالی که d' فهرستی با اندازه $n-1$ است که از d با حذف بزرگترین عنصر آن Δ و کم کردن **1** از Δ بزرگترین عناصر بعدی به دست آمده است. تنها دنباله گرافیکی **1**- عنصری، $d_1=0$ است.

اثبات. برای $n=1$، گزاره بدیهی است. برای $n>1$، نخست ثابت می کنیم که شرط کافی است. با در نظر گرفتن d با قید $d_1 \ge \ldots \ge d_n$، و همچنین با در نظر گرفتن یک گراف ساده G' با دنباله درجه های d'، یک راس جدیدی مجاور با راسهای G' که دارای درجه های $d_{\Delta+1}-1,\ldots,d_2-1$ است می افزاییم. این d_i ها عبارتند از بزرگترین عناصر بعد از (نسخه ای از Δ) و خود، اما اعداد $d_{\Delta+1}-1,\ldots,d_2-1$ لزومی ندارد که بزرگترین اعداد از Δ در d' باشند.

برای اثبات لزوم شرط، با یک گراف ساده G که d را محقق می سازد آغاز می کنیم و یک گراف ساده G' را ایجاد می کنیم که d' را محقق کند. فرض کنیم w راسی از درجه Δ در G باشد. فرض کنیم S یک مجموعه از Δ راسهای در G باشد که درای ((درجه های مطلوب)) $d_{\Delta+1},\ldots,d_2$ است. اگر $N(w)=S$ ، آنگاه می توانیم با حذف w، G' را به دست آوریم. در غیر این صورت، راسی از S وجود دارد که از $N(w)$ حذف شده است. در این حالت، G را برای افزایش $|N(w)\cap S|$ بدون تغییر درجه هیچ راسی تعدیل می کنیم. چون $|N(w)\cap S|$ حداکثر Δ بار می تواند افزایش یابد، تکرار این شیوه یک گراف دلخواه G که d را محقق می سازد به یک گراف G^* تبدیل می کند که d را محقق می نماید و دارای $N(w)=S$ است. حال از G^* می توانیم w را حذف کنیم تا گراف مطلوب G' را که d' را محقق می کند به دست می آوریم.

اگر $N(w)\neq S$، آنگاه می توانیم $z\notin S, x\in S$ را طوری انتخاب کنیم که $w \not\leftrightarrow x$,$w \leftrightarrow z$، زیرا $d(w)=\Delta=|S|$. بنابر انتخاب S، داریم $d(w)\ge d(z)$. می خواهیم wx را اضافه و wz را حذف کنیم، اما نباید درجه های راسها را تغییر دهیم، بنابراین باید درجه های z,x را دوباره بر قرار کنیم. کافی است راسی

مانند y را بیرون $T\{x,y,z\}$ طوری پیدا کنیم که $y \not\leftrightarrow z\ ,y \leftrightarrow x$ ؛ اگر چنین yای وجود داشته باشد، آنگاه همچنین می توانیم xy را حذف و zy را اضافه کنیم (تصویر را ببیند). فرض کنیم e تعداد نسخه های یال xz (**0** یا **1**) باشد. حال x دارای $d(x)-e$ همسایه بیرون T است، و z دارای $d(z)-1-e$ همسایه بیرون T می باشد. چون $d(x) \geq d(z)$,y مطلوب بیرون T وجود دارد، و می توانیم جابجایی مورد نظر را انجام می دهیم.



قضیه فوق فهرستی از n عدد را با آزمودن فهرستی از $n-1$ عدد آزمون می کند؛ از این رو می توان آن را به عنوان یک الگوریتم تکراری برای آزمون اینکه آیا d گرافیکی است انجام داد. شرط لازم ($\sum d_i$ زوج) به طور ضمنی در این مشخص سازی وجود دارد. چون $d', \sum d_i' = \left(\sum d_i\right) - 2D$ باید دارای مجموع زوج برای تحقق پذیری باشد، از این شرط بازگشتی ایجاب می کند که d نیز باید مجموع زوج داشته باشد.

و در انتها تنها مطلبی که از مبحث درجه راسها باقی مانده و مهم است که اکنون تعریف شود اگر چه کاربرد آن در مباحث گرافهای جهت دار است عبارتست از:

درجه ها در گرافهای جهت دار:

نمادگذاری درجه راس برای گرافهای جهت دار وجه تمایز میان سرها و دمهای یالها را شامل می شود.

تعریف. فرض کنیم v راسی در یک گراف جهت دار باشد. درجه خروجی $d^+(v)$ تعداد یالهای با دم v است. درجه ورودی $d^-(v)$ تعداد یالهای با سر v است. همسایگی خروجی یا مجموعه تالی $N^+(v)$ عبارت است از $\{x \in V(G) : v \to x\}$. همسایگی ورودی یا مجموعه مقدم $N^-(v)$ عبارت است از $\{x \in V(G) : x \to v\}$.

برای گرافهای جهت دار دنباله ای از ((جفتهای درجه)) $\left(d^+(v_i), d^-(v_i)\right)$ را داریم. بسیاری از نتایج به دست آمده از گرافها شبیه نتایج حاصل از گرافهای جهت دار است. $2^{\binom{n}{2}}$ گراف ساده با راسهای $v_1, \ldots, v_n$ وجود دارند. به طور مشابهی، 2^{n^2} گراف جهت دار با این راسها وجود دارند به طوری که هر جفت مرتب حداکثر یک بار به عنوان یک یال ظاهر می شود. اگر وجود طوقه ها و داشتن هر دوی $y \to x, x \to y$ را منع کنیم، آنگاه تنها $3^{\binom{n}{2}}$ گراف جهت دار باقی می ماند؛ اینها با گرافهای ساده ارتباط نزدیکی دارند.

زیر گراف ها:

مفهوم این که گراف G زیر گراف گراف H است یعنی G توشکم H جا گرفته است!!

اما تعریف دقیق آن:

تعریف. گراف Gرا زیر گراف H گوییم اگر و فقط اگر $E(G) \subseteq E(H), V(G) \subseteq V(G)$

می‌نویسیم $G \subseteq H$

تعریف. زیر گراف سره:

اگر $G \subseteq H$ بوده ولی $G \neq H$ باشد G را زیر گراف سره H می نامند و می نویسند $G \subseteq H$

تعریف. زیر گراف فراگیر:

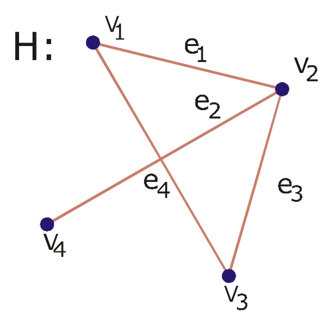
اگر $G \subseteq H$ $V(G) = V(H)$، Gرا زیر گراف فراگیر H می نامند (یعنی همه رئوس H در G آمده)

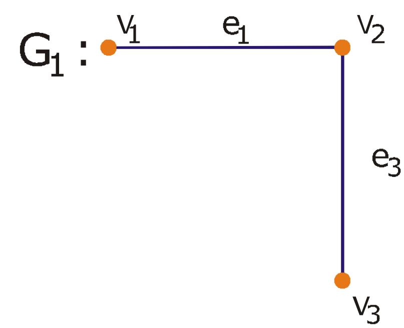
تعریف. زیر گراف القایی:

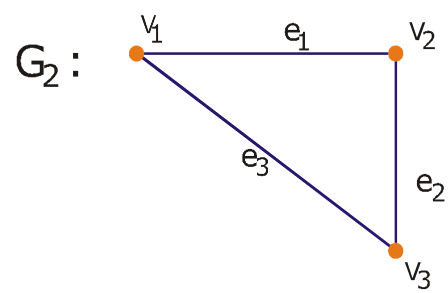
G را زیر گراف القایی Hمی نامند اگر :

$V(G) \subseteq V(H)$ بوده و میان رئوس $V(G)$ تمام یالهای موجود بین همین رئوس در H نیز وجود داشته باشد.

مثال.







G_1, G_2 هر دو زیر گراف H می باشند ولیکن G_1 زیر گراف القایی H نیست

زیرا یال e_3 میان v_1, v_3 در G_1 موجود نمی باشد ولیکن در H موجود می باشد.

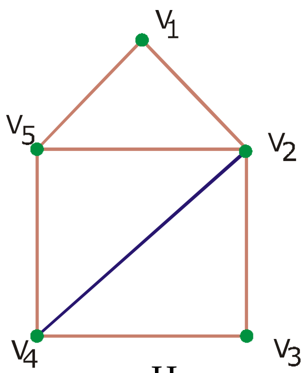
نکته. زیر گراف القاقی و فراگیر G، همان G است. (چرا؟)

تعریف. اگر مجموعه رئوس G، V بوده و $V^1 C V$ باشد.

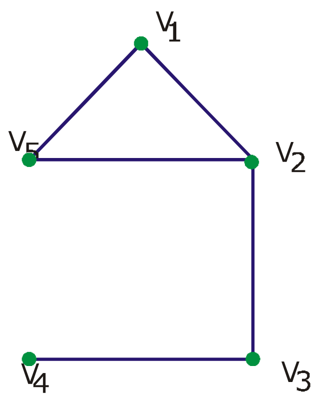
زیر گراف القایی $G(V/V^1)$، زیر گراف القایی از G می باشد که شامل رئوس $V-V^1$ باشد.

زیر گراف القایی $G(V/V^1)$ را به صورت $G-V^1$ نیز نشان می دهند.

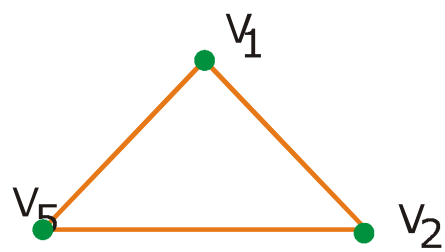
مثالهایی از تمام تعاریف فوق:



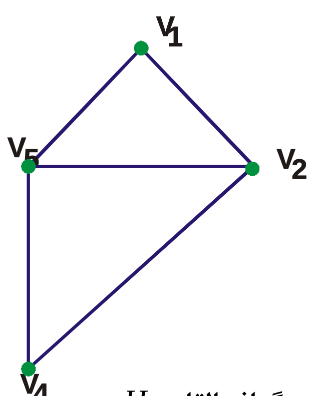
H



G_1 زیر گراف فراگیر H

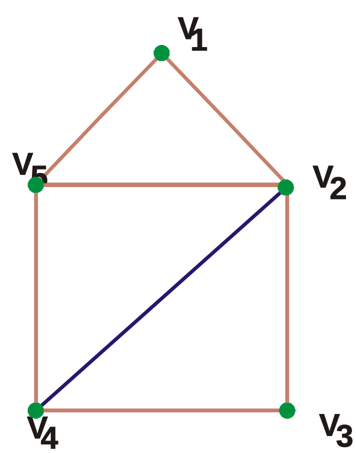


G_2 زیر گراف القایی H



G_3 زیر گراف القایی H

$$G_3 = G - \{V_3\}$$



G_4 زیر گراف القایی و فراگیر H

$$G_4 = H$$

تمرین. نشان دهید هر گراف ساده ، زیر گرافی از $K_{|V(G)|}$ می باشد.

جواب. واضح است مجموعه رئوس هر دو یکسان بوده از طرفی گراف کامل همواره حداکثر یال ممکن را دارد پس $E(G) \subseteq E(K_{(V(G))})$.

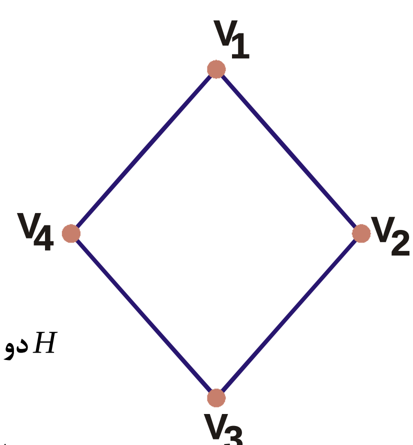
تمرین. به ترتیب فرض کنید G گرافی دو بخشی، کامل، تهی و $k-$منتظم باشد.

برای هر یک بررسی کنید آیا خصوصیت گفته شده به زیر گراف آن هم منتقل می شود یا نه؟

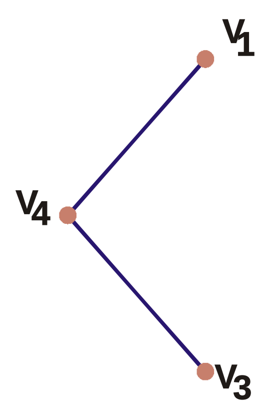
جواب. اثبات جوابهای زیر به عهده خودتان

- زیر گراف یک گراف دو بخشی همواره دو بخشی بوده
- زیر گراف یک گراف کامل همواره کامل بوده
- زیر گراف یک گراف تهی نیز همواره تهی بوده
- ولیکن زیر گراف یک $k-$منتظم الزاماً $k-$ منتظم نمی باشد زیرا:

مثال نقض.



H دو منتظم می‌باشد



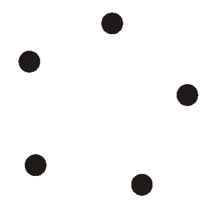
GCH منتظم نیست

گراف تهی

هرگراف بدون یالی را " گراف تهی " می نامند. یعنی گراف $G=(V,E)$ تهی است هر گاه $E=\emptyset$

مثال. گرافهای زیر، گرافهای تهی با تعداد رئوس مختلف می باشند:

(2)



گراف تهی با 5 راس

(1)

گراف تهی با یک راس