می‌آید تا مربعات 001 و 011 را بدهند. توجه کنید که وقتی 1 ها را در مربعات می‌گذارید، ممکن است یک 1 را که از جمله قبلی در آن قرار داده شده بیابید. این نکته برای دومین جمله، $A'B$، رخ می‌دهد که دو عدد 1 در مربع‌های 01 و 010 قرار دارند. مربع 011 با جمله اول، $A'C$، مشترک است، بنابراین تنها یک 1 در آن قرار داده می‌شود. به همین ترتیب می‌بینیم که جمله $AB'C$ متعلق به مربع 101، یعنی مینترم 5 است، و جمله BC متعلق به دو مربع 011 و 111 می‌باشد. تابع جمعاً پنج مینترم دارد و در نقشه شکل ۷-۳ هم با پنج عدد 1 نشان داده شده است. مینترم‌هایی که مستقیماً از نقشه خوانده می‌شوند عبارتند از 1، 2، 3، 5 و 7. تابع را می‌توان به صورت جمع مینترم‌ها نشان داد.

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 2, 3, 5, 7)$$

عبارت جمع حاصلضرب مفروض اولیه چندین جمله دارد. همانطور که در نقشه مشاهده می‌شود می‌توان آن را ساده کرده و عبارتی دو جمله‌ای بدست آورد.

$$F = C + A'B$$

□

۲-۳ نقشه چهار متغیره

نقشه توابع بول چهار متغیره در شکل ۸-۳ نشان داده شده است. در (الف) 16 جمله مینترم فهرست شده و به هر یک مربعی تخصیص داده شده است. در (ب) نقشه دوباره رسم شده تا بیانگر ارتباط بین چهار متغیر باشد. سطرها و ستون‌ها براساس کدگری شماره‌گذاری شده‌اند، و بین هر دو سطر یا ستون مجاور تنها یک رقم تغییر می‌کند. مینترم متعلق به هر مربع از ترکیب شماره سطر و شماره ستون آن بدست می‌آید. مثلاً وقتی اعداد سطر سوم (11) و ستون دوم (01) ترکیب شوند عدد دودویی 1101 حاصل می‌گردد، که معادل 13 دهدهی است. بنابراین، مربع در سطر سوم و ستون دوم مینترم m_{13} را نمایش می‌دهد.

ساده کردن توابع بول چهار متغیره مشابه با روش به کار رفته برای توابع سه متغیره است. مربعات مجاور مربعاتی هستند که در کنار یکدیگرند. به علاوه نقشه در سطحی واقع است و لبه‌های بالا و پایین و چپ و راست آن نیز مجاور است تا به این ترتیب مربعات همجوار را بسازند. مثلاً m_0 و m_2 و نیز m_{11}.

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(الف)

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

(ب)

شکل ۸-۳. نقشه چهار متغیره

و m_3 هر کدام مربعات مجاور را می‌سازند. ترکیب مربعات همجوار به راحتی با بررسی نقشه چهار متغیره قابل تشخیص است:

یک مربع یک مینترم را نمایش می‌دهد، و جمله آن چهار لیترالی است.
دو مربع همجوار یک جمله سه لیترالی را می‌سازند.
چهار مربع همجوار یک جمله دو لیترالی را نشان می‌دهند.
هشت مربع همجوار یک جمله یک لیترالی را نمایش می‌دهند.
شانزده مربع همجوار تابعی برابر 1 را تولید می‌کنند.

هیچ ترکیب دیگری از مربع‌ها نمی‌تواند تابع را ساده کند. دو مثال زیر روال بکار رفته برای توابع بول چهار متغیره را نشان می‌دهد.

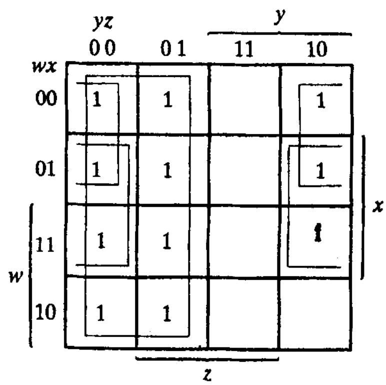
مثال ۵-۳

تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

چون تابع چهار متغیر دارد، باید از نقشه چهار متغیره استفاده کرد. مینترم‌های لیست شده در مجموع فوق با 1ها در نقشه شکل ۹-۳علامت زده شده‌اند. هشت 1 مجاور می‌توانند با هم ترکیب شده و جمله تک لیترالی y' را نتیجه دهند. سه 1 باقیمانده در سمت راست نمی‌توانند با هم ترکیب و جمله ساده‌ای بدهند. آنها باید به صورت دو یا چهار مربع مجاور با هم ترکیب شوند. هر چقدر تعداد مربعات ترکیب شده بیشتر باشد، تعداد لیترال‌ها در جمله کمتر خواهد بود.

در این مثال دو 1 فوقانی سمت راست با دو 1 فوقانی در سمت چپ ترکیب شده و جمله $w'z'$ را می‌دهند. توجه داشته باشید که می‌توان یک مربع را بیش از یک بار به کار برد. حال فقط یک مربع در سطر سوم و ستون چهارم (مربع 1110) باقیمانده است. در عوض انتخاب این مربع به تنهایی، آن را با مربع‌هایی که قبلاً به



شکل ۹-۳. نقشه مثال ۵-۳

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14) = y' + w'z' + xz'$$

کار رفته‌اند برای ایجاد مربع‌های مجاور ترکیب می‌کنیم. این مربعات شامل دو سطر میانی و دو ستون انتهایی بوده و جمله xz' را تولید می‌کنند. تابع ساده شده به صورت زیر است:

$$F = y' + w'z' + xz'$$

□

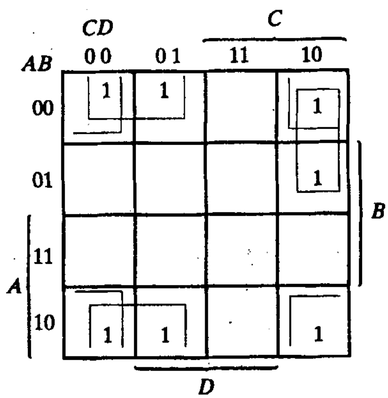
مثال ۶-۳

تابع زیر را ساده کنید.

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

ناحیه مفروش شده با این تابع شامل مربعاتی است که در شکل ۱۰-۳ با 1 علامت زده شده است. این تابع دارای چهار متغیر بوده و همانطور که دیده می‌شود سه جمله سه لیترالی و یک جمله چهار لیترالی دارد. هر جمله سه لیترالی در نقشه با دو مربع نمایش داده شده است. مثلاً $A'B'C'$ در مربعات 0000 و 0001 نشان داده شده است. تابع را می‌توان با انتخاب چهار 1 در گوشه‌ها و ترکیب آنها برای بدست آوردن جمله $B'D'$ ساده کرد. این عمل مجاز است زیرا وقتی نقشه را سطحی تصور کنیم که لبه‌های چپ و راست و لبه‌های پایین و بالای آن با هم مجاورند، این چهار مربع همجوار خواهند بود. دو 1 سمت چپ در سطر بالا با دو 1 در سطر پایین ترکیب می‌شوند تا جمله $B'C'$ حاصل شود. تنها 1 باقیمانده را به صورت دو مربع ترکیب می‌کنیم تا $A'CD'$ حاصل گردد. تابع ساده شده به صورت زیر خواهد بود.

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$



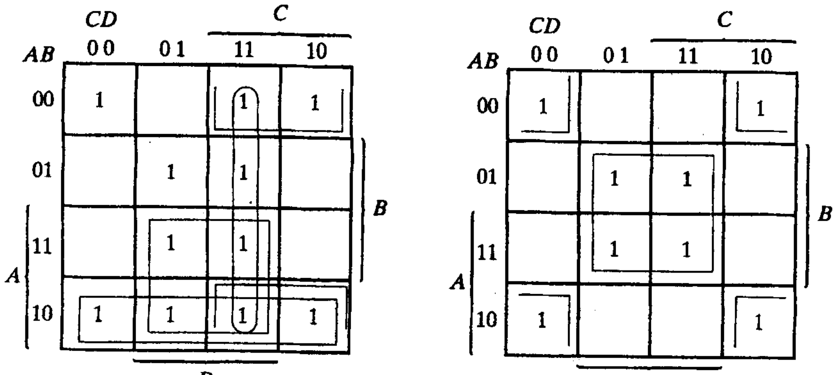
شکل ۱۰-۳. نقشه مثال ۶-۲

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C' = B'D' + B'C' + A'CD'$$

□

موجب‌های اصلی

هنگام انتخاب مربع‌های مجاور در یک نقشه باید مطمئن شویم که همه مینترم‌های تابع هنگام



(ب) موجب‌های اصلی CD, B'C و AD و AB'

(الف) موجب‌های اصلی اساسی BD و B'D'

شکل ۱۱-۳. ساده‌سازی با موجب‌های اصلی

ترکیب مربع‌ها پوشش داده شده‌اند. همچنین باید تعداد جملات در عبارت حداقل شود و هر جمله‌ای که مینترم آن قبلاً به وسیله دیگر جملات به کار رفته نیز کنار گذاشته شود. گاهی نیز ممکن است دو یا سه عبارت بر معیار ساده‌سازی صحّه بگذارند. روش ترکیب مربع‌ها در نقشه را می‌توان سینماتیک‌تر کرد به شرطی که مفهوم جملات موجب‌های اصلی و موجب‌های اصلی اساسی خوب فهمیده شوند. یک موجب اصلی جمله‌ای حاصلضربی است که از ترکیب حداکثر مربعات مجاور به هم حاصل می‌گردد. اگر مینترمی در یک مربع تنها با یک موجب اصلی پوشش یابد، به آن موجب اصلی اساسی گوییم.

موجب‌های اصلی یک تابع را می‌توان با ترکیب حداکثر تعداد مربعات ممکن بدست آورد. این بدان معنی است که یک 1 تنها اگر در مجاورت هر 1 دیگر در نقشه نباشد، یک موجب اصلی است. دو 1 مجاور به شرطی یک موجب اصلی را ایجاد می‌کنند که در داخل یک گروه چهارتایی مربع‌ها واقع نباشند. چهار 1 مجاور یک موجب اصلی را تشکیل می‌دهند بشرطی که در یک گروه از هشت مربع همجوار نباشند و بهمین ترتیب. موجب اصلی اساسی با نظاره بر مربعات 1 و وارسی تعداد موجب‌های اصلی که آن را پوشش می‌دهد تعیین می‌گردد. یک موجب اصلی، اساسی است اگر تنها موجب اصلی باشد که مینترم را پوشش می‌دهد.

تابع چهار متغیره زیر را در نظر بگیرید:

$$F(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$$

مینترم‌های تابع با 1 در نقشه‌های شکل ۱۱-۳ علامت زده شده‌اند. بخش (الف) از شکل، دو موجب اصلی اساسی را نشان می‌دهد. یک موجب، اساسی است زیرا تنها یک راه برای پوشش m_0 در چهار مربع مجاور وجود دارد. این چهار مربع جمله $B'D'$ را تعریف می‌کنند. به طور مشابه، برای ترکیب m_5 با چهار مربع مجاور تنها یک راه وجود دارد و جمله BD از آن حاصل می‌گردد. این دو موجب اصلی اساسی هشت مینترم را پوشش می‌دهند. سه مینترم باقیمانده m_3، m_9 و m_{11} باید بعد ملاحظه شوند.

شکل ۱۱-۳ (ب) همه راه‌های ممکن که سه مینترم با موجب‌های اصلی پوشش می‌یابند را نشان می‌دهد. مینترم m_3 می‌تواند با موجب اصلی CD یا $B'C$ پوشش یابد. مینترم m_9 با هر یک از AD یا AB' پوشش می‌یابد. مینترم m_{11} نیز با هر یک از چهار موجب اصلی می‌تواند پوشش پیدا کند. عبارت ساده شده از جمع منطقی دو موجب اصلی اساسی، و هر دو موجب اصلی دیگر که مینترم‌های m_3 و m_9 و m_{11} را پوشش دهند بدست می‌آید. چهار امکان برای بیان تابع با چهار جمله ضرب که هر یک دو لیترال دارند وجود دارد:

$$
\begin{aligned}
F &= BD + B'D' + CD + AD \\
&= BD + B'D' + CD + AB' \\
&= BD + B'D' + B'C + AD \\
&= BD + B'D' + B'C + AB'
\end{aligned}
$$

مثال فوق نشان داد که شناسایی موجب‌های اصلی در نقشه در تعیین صور متفاوت تابع ساده شده کمک مؤثری می‌نمایند.

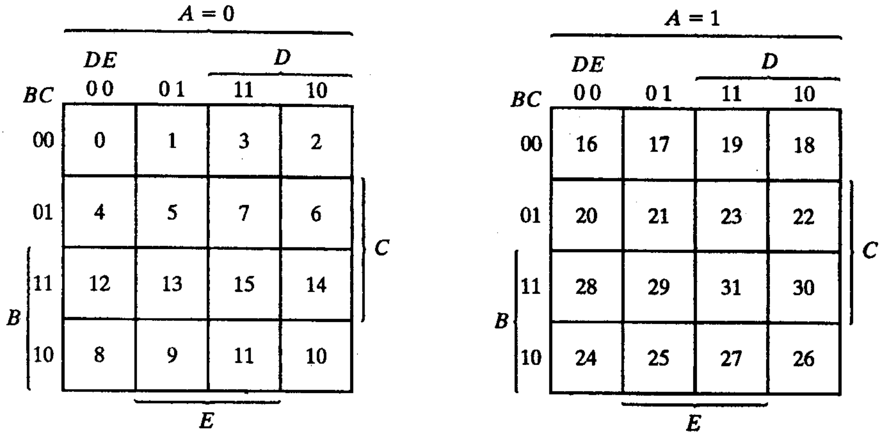
روال یافتن عبارت ساده شده از نقشه لازم می‌دارد که ابتدا تمام موجب‌های اصلی اساسی را معین کنیم. تابع ساده شده از جمع منطقی همه موجب‌های اصلی اساسی، به علاوه دیگر موجب‌های اصلی حاصل می‌گردد. این موجب‌های اصلی ممکن است برای پوشش مینترم‌های باقیمانده‌ای که در موجب اصلی اساسی وجود ندارند لازم باشد. گاهی بیش از یک راه برای ترکیب مربعات وجود دارد و هر ترکیب هم ممکن است عبارت ساده شده یکسانی را تولید کند.

۳-۳ نقشه پنج متغیره

استفاده از نقشه‌هایی که بیش از چهار متغیر دارند چندان ساده نیست. یک نقشه پنج متغیره به 32 مربع و نقشه شش متغیره به 64 مربع نیاز دارد. وقتی تعداد متغیرها زیاد شود، تعداد مربعات هم به طور بی‌رویه‌ای افزایش می‌یابند و یافتن مربعات همجوار بیش از پیش به شکل هندسی وابسته می‌گردد.

یک نقشه پنج متغیره در شکل ۱۲-۳ نشان داده شده است. این نقشه، از دو نقشه چهار متغیره با متغیرهای A ، B ، C ، D و E تشکیل یافته و متغیر A آن دو را از هم تفکیک کرده است. نقشه چهار متغیره سمت چپ 16 مربعی را نشان می‌دهد که در آن $A = 0$ است، و دیگر نقشه چهار متغیره، مربعات مربوط به $A = 1$ را نمایش می‌دهد. مینترم‌های 0 تا 15 متعلق به A=0 و مینترم‌های 16 تا 31 متعلق به A=1 است. هر نقشه چهار متغیره وقتی جداگانه بررسی شود همجواری تعریف شده قبلی خود را حفظ می‌کند. به علاوه هر مربع از نقشه A=0 با مربع متناظرش در مربع A=1 همجوار است. مثلاً مینترم 4 با مینترم 20 و مینترم 15 با 31 مجاور است. بهترین راه تجسم این قانون برای مربع‌های همجوار این است که این دو نیم نقشه را بر روی یکدیگر تصور کنیم. هر دو مربعی که روی هم قرار گیرند مجاور شناخته می‌شوند.

با پیگیری روشی که برای نقشه پنج متغیره به کار رفت، می‌توان نقشه شش متغیره را با 4 نقشه چهار متغیره بدست آورد تا 64 مربع مورد نیاز حاصل گردد. نقشه‌هایی با شش یا تعداد بیشتری متغیر، نیاز به



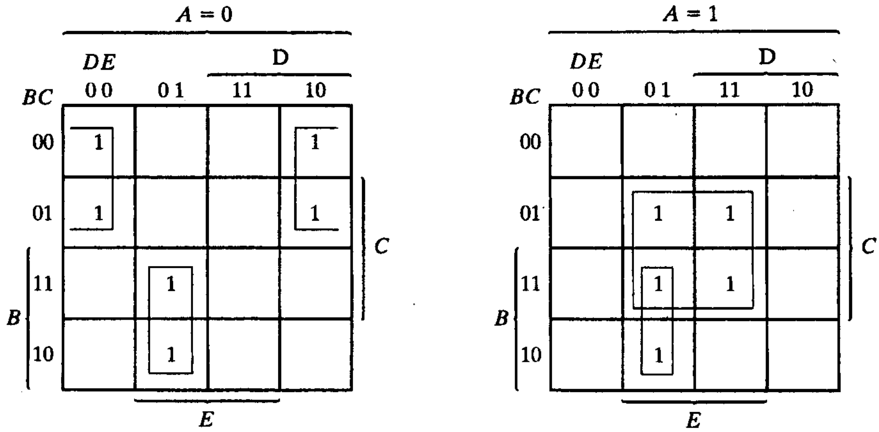
شکل ۱۲-۳. نقشه پنج متغیر

تعداد بی‌شماری مربع داشته و استفاده از آنها غیرعملی است. روش دیگر، استفاده از برنامه‌های کامپیوتری در ساده‌سازی توابع بول با متغیرهای بی‌شمار می‌باشد.

با بررسی و در نظر گرفتن تعریف جدید همجواری مربعات، می‌توان نشان داد که 2^k مربع همجوار به ازاء $k = (0, 1, 2, ..., n)$ در یک نقشه n متغیره ناحیه را مشخص می‌کند که نمایش‌دهنده جمله‌ای با $n - k$ لیترال است. برای این که عبارت فوق مفهوم داشته باشد باید همیشه n بزرگتر از k باشد. وقتی $n = k$ است، تمام سطح نقشه ترکیب شده و تابع یگانی (1) را تولید می‌کند. جدول ۱-۳ رابطه بین تعداد مربعات مجاور و تعداد لیترال در هر جمله را نشان می‌دهد. مثلاً هشت مربع مجاور ناحیه‌ای را در نقشه پنج متغیره ترکیب می‌کنند تا یک جمله دو متغیره حاصل شود.

جدول ۱-۳. رابطه بین تعداد مربعات مجاور و تعداد لیترال‌ها در یک جمله

	تعداد مربعات مجاور	تعداد لیترال‌ها در یک جمله در یک نقشه n متغیره			
K	2^k	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0	1	2	3	4	5
1	2	1	2	3	4
2	4	0	1	2	3
3	8		0	1	2
4	16			0	1
5	32				0



شکل ۱۳-۳. نقشه مثال ۷-۳ $F = A'B'E' + BD'E + ACE$

مثال ۷-۳

تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(A, B, C, D, E) = (0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

نقشه پنج متغیره برای این تابع در شکل ۱۳-۳ دیده می‌شود. در بخشی از نقشه که متعلق به مینترم‌های 0 تا 15 است، $A = 0$ بوده و در آن شش مینترم مقدار 1 را دارند. پنج مینترم دیگر به بخش $A = 1$ متعلق است. چهار مربع مجاور در نقشه $A = 0$ با هم ترکیب شده‌اند تا جمله $A'B'E'$ را بدهند. توجه کنید که باید A' را نیز در جمله منظور کنیم زیرا تمام مربع‌ها متعلق به نقشه $A = 0$ می‌باشند. دو مربع در ستون 01 و دو سطر آخر در هر دو بخش نقشه مشترکند. بنابراین آنها چهار مربع مجاور را تشکیل داده و جمله سه متغیره $BD'E$ را می‌سازند. در اینجا متغیر A آورده نشده است زیرا مربع‌های مجاور به هر دو $A = 0$ و $A = 1$ متعلق‌اند. جمله ACE از چهار مربع همجوار در نقشه $A = 1$ بدست می‌آید. تابع ساده شده جمع منطقی سه جمله می‌باشد.

$$F = A'B'E' + BD'E + ACE$$

□

۳-۴ ساده‌سازی با ضرب حاصل جمع‌ها

در تمام مثال‌های قبلی توابع بول حاصل از نقشه به فرم جمع حاصلضرب‌ها بیان شدند. با کمی اصلاح می‌توان فرم ضرب حاصل جمع‌ها را بدست آورد.

روال تهیه یک تابع حداقل برحسب ضرب حاصل جمع‌ها از خواص اصلی توابع بول حاصل می‌گردد. 1 های واقع در مربع‌های نقشه نشانگر مینترم‌های تابع است. مینترم‌هایی که در تابع ذکر نشوند

متمم تابع را بیانگرند. با توجه به این مطلب مشاهده می‌کنیم که متمم یک تابع به وسیله مربع‌هایی که با 1 علامت‌زنی نشده‌اند بیان می‌گردد. اگر در مربع‌های خالی 0 قرار داده و آنها را با روش مربع‌های همجوار ترکیب کنیم عبارت ساده شده متمم تابع یعنی F' را بدست خواهیم آورد. متمم F' به ما تابع F را باز می‌گرداند. به دلیل عمومیت تئوری دمورگان تابع حاصل به طور خودکار به صورت ضرب حاصل جمع‌هاست. بهترین روش برای تشریح این مطلب ارائه یک مثال است.

مثال ۸-۳

تابع بولی زیر را (الف) به صورت جمع حاصلضرب‌ها، (ب) ضرب حاصل جمع‌ها ساده کنید.

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

1های موجود در نقشه شکل ۱۴-۳ همه مینترم‌های تابع را نمایش می‌دهند. مربع‌هایی که با 0 علامت زده شده‌اند مینترم‌های غایب در F را نشان می‌دهند، بنابراین متمم F را بیانگر هستند. ترکیب مربعات حاوی 1ها تابع ساده شده را به صورت جمع حاصلضرب‌ها بدست می‌دهد:

$$F = B'D' + B'C' + A'C'D \qquad \text{(الف)}$$

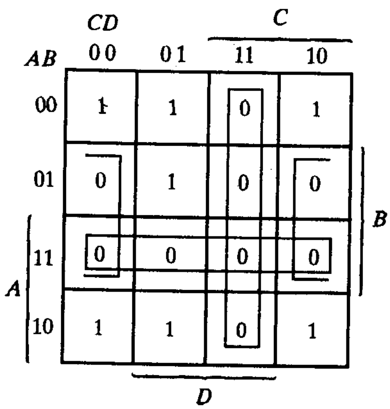
اگر مربعات حاوی 0ها را ترکیب کنیم، تابع متمم ساده شده بدست خواهد آمد:

$$F' = AB + CD + BD'$$

با اعمال تئوری دمورگان (استفاده از دوگان و متمم کردن هر متغیر طبق آنچه در بخش ۴-۲ دیدیم) تابع ساده شده را به صورت ضرب حاصل جمع‌ها بدست می‌آوریم:

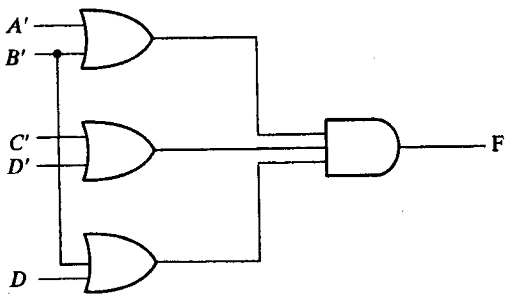
$$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D) \qquad \text{(ب)}$$

□

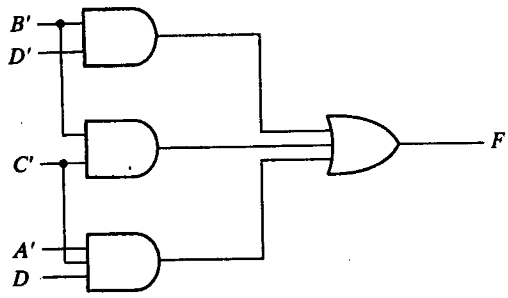


شکل ۱۴-۳. نقشه برای مثال ۸-۳

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10) = B'D' + B'C' + A'C'D = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$$



$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$ (ب)



$F = B'D' + B'C' + A'C'D$ (الف)

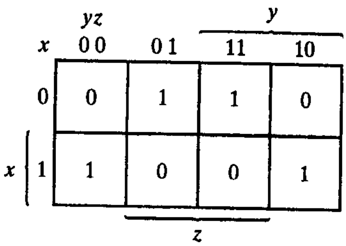
شکل ۱۵-۳. پیاده‌سازی با گیت تابع مثال ۸-۳

پیاده‌سازی عبارت ساده شده حاصل از مثال ۸-۳ در شکل ۱۵-۳ دیده می‌شود. عبارت جمع‌حاصلضرب‌ها در بخش (الف) با گروهی از گیت‌های AND پیاده‌سازی شده است. خروجی گیت‌های AND نیز به ورودی‌های یک گیت OR متصل گردیده است. همان تابع به صورت ضرب حاصل جمع‌ها در شکل (ب) با تعدادی گیت OR ، که هر یک متعلق به یک جمله OR است، پیاده‌سازی شده و خروجی آنها به یک AND منتهی گشته است. در هر دو حال فرض بر این است که متمم متغیرها نیز مستقیماً در دسترسند و بنابراین نیازی به وارونگر نمی‌باشد. الگوهای ایجاد شده در شکل ۱۵-۳ یک سری روش‌های کلی می‌باشند که به وسیله آنها هر تابع بول استاندارد قابل پیاده‌سازی است. در جمع حاصلضرب‌ها، گیت‌های AND به یک OR ختم می‌شوند و در ضرب حاصل جمع‌ها گیت‌های OR به یک AND متصل می‌گردند. هر یک از دو پیکربندی فوق دارای دو سطح از گیت‌ها می‌باشند. بنابراین پیاده‌سازی یک تابع استاندارد را پیاده‌سازی دو سطحی می‌گویند.

مثال ۸-۳ روالی را برای محاسبه فرم ساده شده یک تابع برحسب ضرب حاصل جمع‌ها، وقتی تابع ابتدا به صورت جمع مینترم‌ها است، نشان می‌دهد. این روال هنگامی که تابع در آغاز برحسب ماکسترم‌ها بیان شود نیز معتبر است. برای مثال به جدول درستی (۲-۳) که تابع F را تعریف می‌کند

جدول ۲-۳. جدول درستی تابع F

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



شکل ۱۶-۳. نقشه برای تابع جدول (۲-۳)

توجه نمایید. این تابع به صورت جمع مینترمها چنین بیان میشود:

$$F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 4, 6)$$

در ضرب ماکسترمها تابع به صورت زیر است:

$$F(x, y, z) = \Pi(0, 2, 5, 7)$$

به بیان دیگر، 1 های تابع، مینترمها را نشان میدهند و 0 های آن بیانگر جملات ماکسترم هستند. نقشه این تابع در شکل ۱۶-۳ دیده میشود. برای ساده کردن این تابع، در مربع مربوط به هر جمله مینترم که تابع به ازاء آن، مقدار 1 دارد، عدد 1 گذاشته و بقیه مربعها را با 0 پر میکنیم. از طرف دیگر اگر تابع به فرم ضرب ماکسترمها داده شده باشد در ابتدا در مربعاتی که جملات آن در تابع است 0 قرار میدهیم و بقیه مربعها با 1 پر میشوند. سپس تابع میتواند به یکی از فرمهای استاندارد ساده شود. برای جمع حاصلضربها، 1 ها را با هم ترکیب میکنیم و خواهیم داشت:

$$F = x'z + xz'$$

برای ضرب حاصل جمعها، 0 ها را با هم ترکیب میکنیم تا متمم تابع ساده شده به صورت زیر حاصل شود:

$$F' = xz + x'z'$$

که نشان میدهد تابع XOR متمم تابع همارزی (XNOR) است (بخش ۶-۲). با متممگیری مجدد از F′ تابع ساده شده را به ضرب حاصل جمعها بدست خواهیم آورد.

$$F = (x' + z')(x + z)$$

برای وارد کردن یک تابع در یک نقشه که برحسب ضرب حاصل جمعها بیان شده است، میباید متمم تابع را بدست آورد و در آن مربعهای مربوطه را با 0 پر کرد. مثلاً تابع

$$F = (A' + B' + C')(B + D)$$

را میتوان با متممگیری از آن وارد جدول کرد.

$$F' = ABC + B'D'$$

آنگاه مربعهایی که مینترمهای F′ را تشکیل میدهند با 0 پر میکنیم. بقیه مربعها را با 1 پر مینماییم.

۵-۳ حالات بیاهمیت

جمع منطقی مینترمهای مربوط به یک تابع شرایطی را که تحت آن تابع برابر 1 است، مشخص

می‌نماید. تابع در ازاء بقیه مینترم‌ها 0 است. در این حالت فرض بر این است که همه ترکیبات مقادیر برای متغیرهای تابع معتبرند. در عمل کاربردهایی وجود دارند که در آنها در ازاء ترکیبات معینی از متغیرها، تابع مشخص نیست. مثلاً یک کد دودویی چهار بیتی برای ارقام دهدهی دارای شش ترکیب است که به کار نرفته‌اند و در نتیجه نامشخص تصور می‌گردند. توابعی که در ازاء ترکیبی از ورودی‌ها خروجی‌های نامشخص دارند، تابع غیرکامل نامیده می‌شود. در بسیاری از کاربردها، توجهی به مقدار منتسب به تابع در ازاء مینترم‌های نامعین نخواهیم داشت. به این دلیل مرسوم است که همه مینترم‌های نامشخص در تابع را حالات بی‌اهمیت بخوانیم. از حالات بی‌اهمیت می‌توان برای ساده‌سازی بیشتر عبارت بول در یک نقشه استفاده کرد.

باید توجه داشت که یک مینترم بی‌اهمیت ترکیبی از متغیرهاست که مقدار منطقی آن نامشخص است. به این دلیل نمی‌توان یک حالت بی‌اهمیت را در نقشه با 1 نشان داد زیرا این عمل به این معنی است که تابع برای ترکیب خاص از ورودیها همواره برابر 1 می‌باشد. به طور مشابه گذاشتن 0 در مربع‌های نقشه به معنی 0 بودن همیشگی تابع در آن حالت است. برای تفکیک حالت بی‌اهمیت از 1 ها و 0 ها از X استفاده می‌کنیم. بنابراین هر X در داخل یک مربع از نقشه به این معنی است که تخصیص 1 یا 0 به تابع به ازاء یک مینترم خاص فاقد اهمیت است.

وقتی مربع‌های مجاور انتخاب می‌گردند تا تابع در جدول ساده شود، مینترم‌های بی‌اهمیت با این ایده که ساده‌ترین فرم برای تابع بدست آید، برابر 1 یا 0 فرض می‌شوند. در ساده‌سازی تابع می‌توانیم با توجه به ساده‌ترین فرم ممکن برای تابع، به حالات بی‌اهمیت 0 یا 1 دهیم.

مثال ۹-۳

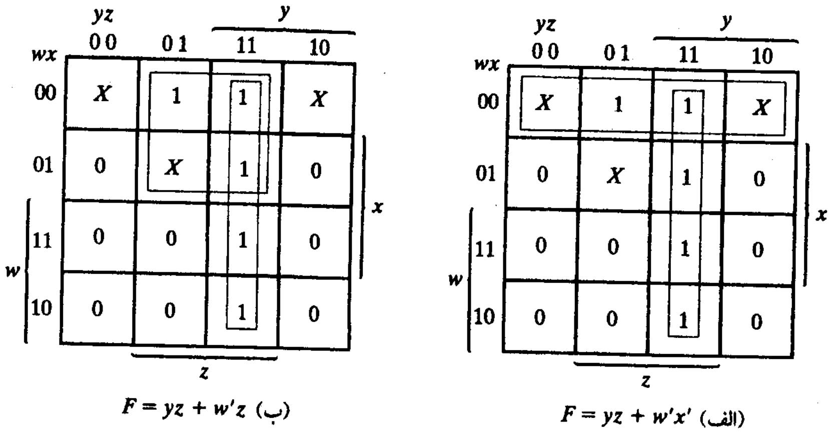
تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(w, x, y, z) = \sum(1, 3, 7, 11, 15)$$

که حالات بی‌اهمیت زیر را داراست.

$$d(w, x, y, z) = \sum(0, 2, 5)$$

مینترم‌های F ترکیباتی از متغیرها هستند که تابع را برابر 1 می‌کنند. مینترم‌های d مینترم‌های بی‌اهمیتی هستند که ممکن است به آنها 0 یا 1 تخصیص داده شود. ساده‌سازی نقشه در شکل ۱۷-۳ نشان داده شده است. مینترم‌های F با 1 علامت زده شده‌اند، مینترم‌های d با X علامت‌گذاری شده‌اند و بقیه مربع‌ها با 0 پر شده‌اند. برای بدست آوردن عبارت جمع حاصلضرب‌های ساده شده باید هر پنج 1 موجود در نقشه به حساب آیند، ولی بسته به روش ساده‌سازی ممکن است X ها را در نظر بگیریم و یا نگیریم. جمله yz چهار مینترم در سومین ستون را پوشش می‌دهد. مینترم باقیمانده m_1 می‌تواند با مینترم m_3 ترکیب شده و جمله سه لیترالی $w'x'z$ را بدهند. با این وجود با احتساب یک یا دو X همجوار، می‌توانیم چهار مربع مجاور را ترکیب نماییم تا جمله دو متغیره حاصل گردد. در بخش (الف) از نمودار، مینترم‌های بی‌اهمیت 0 و 2 با 1 جایگزین شده‌اند



شکل ۱۷-۳. مثال با حالات بی‌اهمیت

و تابع ساده شده به صورت زیر است.

$$F = yz + w'x'$$

در بخش (ب) از نمودار، مینترم بی‌اهمیت 5 با 1 جایگزین شده و آنگاه تابع ساده شده به فرم زیر است:

$$F = yz + w'z$$

هر یک از دو عبارت شرایط بیان شده برای این مثال را دارا هستند. □

مثال قبل نشان داد که مینترم‌های بی‌اهمیت در نقشه در ابتدا با Xها علامت خورده‌اند و فرض می‌شود که بتوانند 0 و یا 1 بشوند. انتخاب 0 و یا 1 به روش ساده کردن تابع غیرکامل وابسته است. پس از انتخاب، تابع ساده شده حاصل متشکل از مجموع مینترم‌ها است و در آنها مینترم‌هایی که در آغاز نامعلوم بوده ولی بعد به عنوان 1 انتخاب شده‌اند نیز وجود خواهند داشت. دو عبارت ساده شده حاصل در مثال ۹-۳ را در نظر بگیرید:

$$F(w, x, y, z) = yz + w'x' = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 11, 15)$$
$$F(w, x, y, z) = yz + w'z = \Sigma(1, 3, 5, 7, 11, 15)$$

هر دو عبارت شامل مینترم‌های 1 ، 3 ، 7 ، 11 و 15 می‌باشند که تابع F را برابر 1 می‌کنند. مینترم‌های بی‌اهمیت در آن دو به طور متفاوتی به کار گرفته شده‌اند و در اولین عبارت مینترم‌های 0 و 2 برابر 1 گرفته شده و مینترم 5 با انتخاب 0 حذف شده است. در دومین عبارت مینترم 5 برابر 1 و مینترم‌های 0 و 2 با مقدار 0 جایگزین شده‌اند. دو عبارت توابعی را نشان می‌دهند که فرم جبری متفاوتی دارند. هر دو مینترم‌های مشخص شده را می‌پوشانند ولی هر یک مینترم‌های بی‌اهمیت متفاوتی را پوشش می‌دهند. مادامی که تابع مشخص شده غیرکامل است، هر دو عبارت قابل قبول‌اند زیرا تنها اختلاف در مقدار F مینترم‌های بی‌اهمیت می‌باشند.

می‌توان عبارت ضرب حاصل جمع‌ها را هم برای تابع شکل ۳-۱۷ بدست آورد. در این حال، تنها راه برای ترکیب 0ها جایگزینی مینترم‌های بی‌اهمیت شماره 0 و 2 با مقدار 0 می‌باشد و به این ترتیب تابع متمم ساده شده بدست می‌آید:

$$F' = z' + wy'$$

با متمم‌گیری از طرفین، عبارت ساده شده به صورت ضرب حاصل جمع‌ها خواهد بود:

$$F(w, x, y, z) = z(w' + y) = \Sigma(1, 3, 5, 7, 11, 15)$$

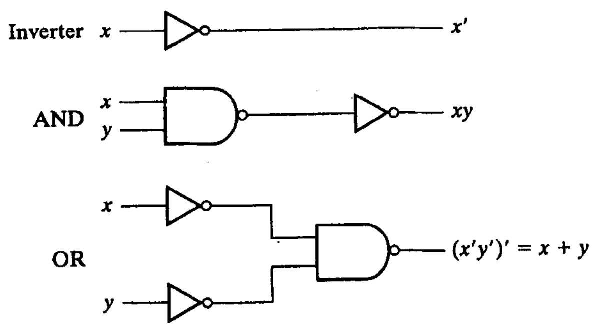
در این حال، ما مینترم‌های شماره 0 و 2 را با مقدار 0 و مینترم 5 را با 1 جایگزین کرده‌ایم.

۶-۳ پیاده‌سازی با NAND و NOR

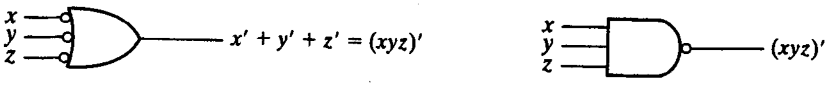
مدارهای دیجیتال اغلب به جای AND و OR با گیت‌های NAND و NOR ساخته می‌شوند. ساختن گیت‌های NAND و NOR با اجزاء الکترونیکی ساده‌تر بوده و به عنوان گیت‌های پایه در تمام خانواده‌های IC های دیجیتال به کار می‌روند. به دلیل مزیت گیت‌های NAND و NOR در طراحی مدارهای دیجیتال، قواعد و روال‌هایی برای تبدیل توابع بول بیان شده برحسب AND ، OR و NOT به نمودارهای منطقی معادل برحسب NAND و NOR بوجود آمده است.

مدارهای NAND

گیت NAND را یک گیت یونیورسال می‌گویند زیرا هر سیستم دیجیتالی را می‌توان با آن پیاده‌سازی کرد. برای این که نشان دهیم هر تابع بولی قابل پیاده‌سازی با گیت‌های NAND می‌باشد، کافی است فقط نشان دهیم که اعمال منطقی AND ، OR و NOT را می‌توان با NAND پیاده‌سازی کرد. این کار درشکل ۳-۱۸ نشان داده شده است. عمل متمم از یک گیت NAND یک ورودی که دقیقاً مثل NOT عمل می‌کند حاصل می‌گردد. عمل AND نیاز به دو گیت NAND دارد. اولی عمل NAND و دومی عمل NOT را انجام می‌دهد. عمل OR از طریق یک گیت NAND و دو NOT در هر ورودی حاصل می‌شود.



شکل ۳-۱۸. عملیات منطقی با گیت‌های NAND



Invert–OR (ب) AND–invert (الف)

شکل ۱۹-۳. دو سمبل گرافیکی برای گیت NAND

راهی مناسب برای پیاده‌سازی یک تابع بول با گیت‌های NAND ، بدست آوردن تابع بول ساده شده برحسب عملگرهای بولی و سپس تبدیل تابع به منطق NAND است. تبدیل یک عبارت جبری از AND ، OR و NOT به NAND به سادگی با دستکاری نمودار AND–OR به نمودار NAND انجام می‌شود.

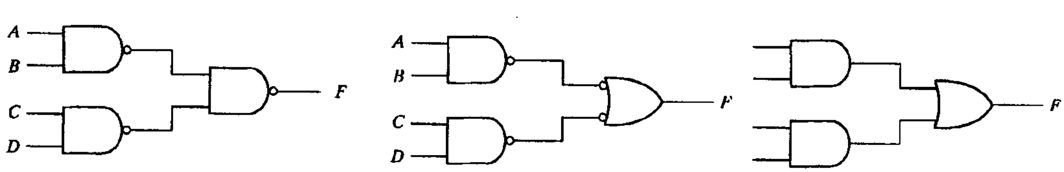
برای ساده سازی تبدیل به منطق NAND ، بهتر است سمبل گرافیکی دیگری برای گیت تعریف کنیم. دو سمبل گرافیکی معادل برای گیت NAND در شکل ۱۹-۳ دیده می‌شود. سمبل AND–invert قبلاً معرفی شد و متشکل بود از یک سمبل AND و به دنبال آن یک دایره کوچک که به آن حباب گفته شد و نقش متمم‌سازی را داشت. به همین ترتیب می‌توان گیت NAND را با سمبل گرافیکی OR با حبابی در هر ورودی نشان داد. سمبل invert–OR برای گیت NAND از تئوری دمورگان و با توجه به این قرارداد که دوایر کوچک به منزله متمم کردن هستند بدست می‌آید. دو سمبل گرافیکی فوق در طراحی و تحلیل مدارهای NAND مفیدند. وقتی هر دو سمبل در یک نمودار به کار روند گوییم مدار با علائم مخلوط نشان داده شده است.

پیاده‌سازی دو سطحی

برای پیاده‌سازی توابع بول با گیت‌های NAND ، تابع باید به فرم جمع حاصلضرب‌ها باشد. برای درک ارتباط بین عبارت جمع حاصلضرب‌ها و معادل NAND آن، به نمودارهای منطقی شکل ۲۰-۳ توجه کنید. هر سه نمودار معادل بوده و تابع زیر را پیاده می‌نمایند.

$$F = AB + CD$$

در (الف) تابع با گیت‌های AND و OR پیاده‌سازی شده است. در (ب)، گیت‌های AND با گیت‌های NAND و گیت OR نیز با یک گیت NAND که با سمبل OR–invert مشخص شده پیاده‌سازی شده است. توجه داشته باشید که یک حباب به معنی متمم و دو حباب در یک مسیر دوبار متمم‌سازی را



(پ) (ب) (الف)

شکل ۲۰-۳. سه راه پیاده‌سازی تابع $F = AB + CD$

نشان می‌دهند، پس می‌توانند حذف شوند. حذف حباب‌ها در گیت‌های (ب) مدار شکل (الف) را نتیجه می‌دهد. بنابراین دو نمودار یک تابع را پیاده‌سازی می‌کنند پس معادل‌اند.

در شکل ۲۰-۳ (پ)، خروجی گیت NAND با سمبل گرافیکی AND−invert ترسیم شده است. هنگام رسم نمودارهای منطقی NAND ، هر یک از دو مدار (ب) یا (پ) پذیرفته است. مدار (ب) از علائم مخلوط استفاده کرده است و رابطه مستقیم‌تری را با عبارت بول پیاده شده نشان می‌دهد. صحت پیاده‌سازی NAND در شکل ۲۰-۳ (پ) می‌تواند به صورت جبری تحقیق شود. تابعی که این شکل را پیاده کرده است به سادگی با تئوری دمورگان قابل تبدیل به جمع حاصلضرب‌هاست:

$$F = \left((AB)'(CD)'\right)' = AB + CD$$

مثال ۱۰-۳

تابع بول زیر را با گیت‌های NAND پیاده کنید.

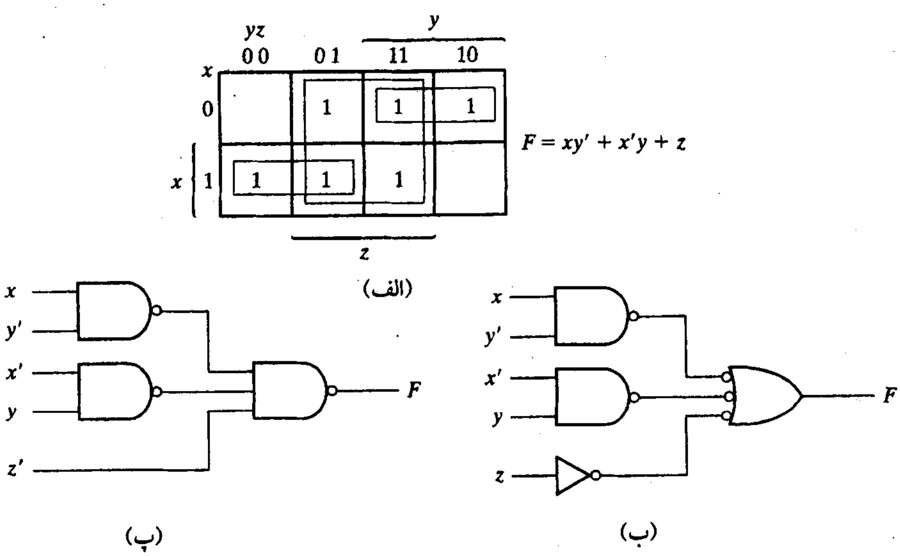
$$F(x, y, z) = (1, 2, 3, 4, 5, 7)$$

اولین قدم در تبدیل، ساده‌سازی تابع در جمع حاصلضرب‌هاست. این کار به کمک نقشه شکل ۲۱-۳ (الف) انجام شده است و تابع حاصل به صورت زیر است.

$$F = xy' + x'y + z$$

پیاده‌سازی NAND دو سطحی در شکل ۲۱-۳ (ب) به صورت علائم مخلوط دیده می‌شود. توجه کنید که ورودی z باید یک گیت NAND یک ورودی باشد تا حباب موجود در گیت سطح دوم را جبران کند.

روش دیگری برای ترسیم نمودار منطقی در شکل ۲۱-۳ (پ) نشان داده شده است. در اینجا تمام



شکل ۲۱-۳. حل مثال ۱۰-۳