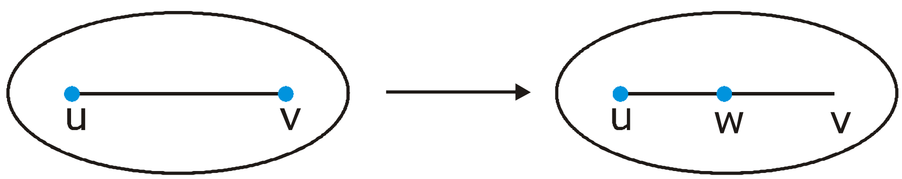
همسایگی $\{u,v\}$ و z را با همسایگی $\{x,y\}$ به G می افزاییم. بنابر بسط لم، گـراف G' حاصـل 2- همبنـد است،و از این رو z,w روی یک دور مشترک C در قرار دارند. چون z,w هر یک دارای درجه 2 هستند، این دور باید شامل مسیرهای v,w,u و y,z,x باشد، اما نه مسیرهای uv یا xy. مسیرهای v,w,u و y,z,x را در C به جای یالهای uv و xy جایگزین می کنیم تا دور مطلوب در G به دست آید.

تعریف. زیر تقسیم یک یال uv از یک گراف بیسوی G عبارت است از عمل حذف uv و افزودن یک مسیر v,w,u میان یک راس جدید w.



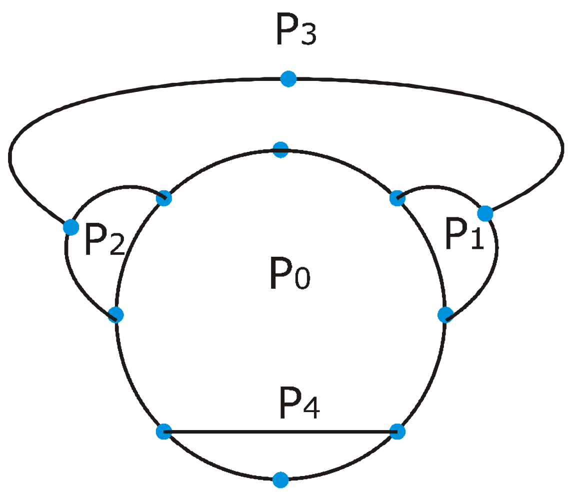
فرع. اگر G، 2- همبند باشد،آنگاه گراف G' به دست آمده از زیر تقـسیم یـک یـال G، 2- همبنـد است.

اثبات. فرض کنیم G' با افزودن w به زیر تقسیم به دست می آید. ثابت می کنیم که هر دو یال از G' روی یک دور قرار دارند. برای هر جفتی که شامل یا نباشد، از دور تضمین شده در G استفاده می کنیم،مگر آنکه آن از uv استفاده کند، که در این حالت آن را تعدیل می کنیم تا از w میان v,u بگذرد. برای یک جفت متشکل از xy و یکی از $\{uw,wv\}$،دور حاصل از xy,uv را در G تعدیل می کنیم؛ این مطلب در مورد $\{uw,wv\}$ نیز انجام می گیرد.

مشخص سازیهای ساختاری یا شیوه های تجزیه می توانند به الگوریتمهایی برای یک رده از گرافهـای بیانجامند. رده گرافهای 2- همبند دارای یک مشخص سازی هستند که ساخت چنین گرافهایی را از یک دور

بیان می کند.

تعریف. یک مسیر افزودن به G، افزودن مسیری است به G با طول $l \geq 1$ میـان دو راس از G ، کـه $l-1$ راس جدید را ارائه می کند؛ مسیر افزوده شده یک دسته می باشد. یک تجزیه دسته عبـارت اسـت از یک افراز $E(G)$ به مجموعه های $P_0, P_1, \ldots, P_k$ به طوری که $C = P_0$ یک دور باشـد، و P_i بـه ازای $i \geq 1$ یک مسیر افزودن به گراف تشکیل شده به وسیله $P_0, \ldots, P_{i-1}$ باشد.



قضیه. یک گراف 2- همبند است اگر، و فقط اگر، دارای یک تجزیه دسته باشد. علاوه بر ایـن، هـر دور در یک گراف 2- همبند، دور آغازی در یک تجزیه دسته است.

اثبات. کفایت شرط. چون دورها 2- همبند هستند، کافی است نشان دهیم که افزودن مسیر، حافظ 2- همبندی است. فرض کنیم u,v نقاط پایانی یک دسته P باشند که باید به گراف 2- همبند G افـزوده شـوند. افزودن یک یال نمی تواند همبندی را تحویل کند، پس $G+uv$ 2- همبند است. تسلسلی از زیر تقـسیمهای یال، $G+uv$ را به $G \cup P$ تبدیل می کند؛بنابر فرع قبل هر زیر تقسیم حافظ 2- همبندی است.

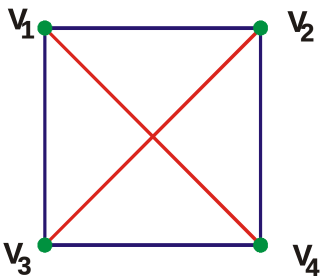
لزوم شرط. با در نظر گرفتن یک گراف 2- همبند G، یک تجزیه دسته از G را از یک دور C در G می سازیم. فرض کنیم $G_0 = C$. فرض کنیم یک زیر گراف G_i را با افزودن دسته ها ساخته ایم. اگر $G_i \neq G$ آنگاه می توانیم یک یال uv را از $G - E(G_i)$ و یک یال $xy \in E(G_i)$ را انتخاب کنیم. چون G، 2- همبند است xy, uv روی یک دور مشترک C' قرار دارند. فرض کنیم P مسیری در C' باشد که شامل uv و دقیقاً دو راس از G_i می باشد، هر کدام در یک انتهای P. حال P دسته ای است که می تواند به G_i افزوده شود تا یک زیر گراف بزرگتر G_{i+1} به دست آید. این فرآیند هنگامی پایان می یابد که همه G جذب شده باشد.

هر گراف 2- همبند، 2- یال – همبند نیز می باشد، اما عکس آن برقرار نیست، پس تجزیه گرافهای 2 –یال –همبند نیاز به عمل کلیتری دارد. اثبات آن ساده تر است.

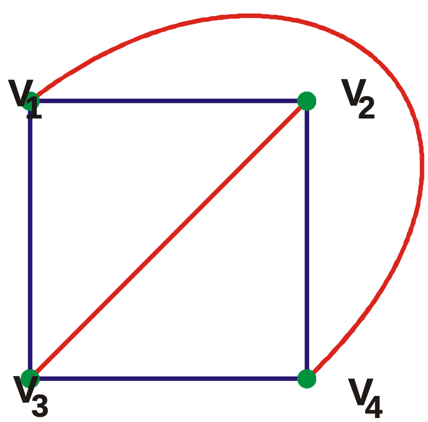
مقدمه :

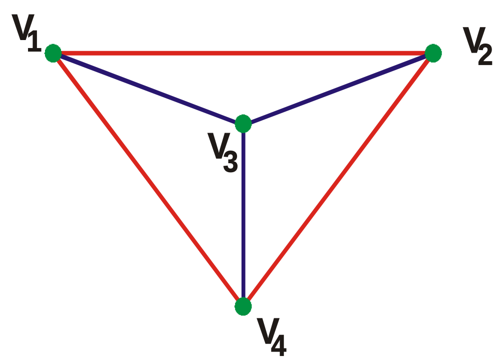
گراف، سطح و رسم گراف

به گراف K_4 زیر دقت کنید:



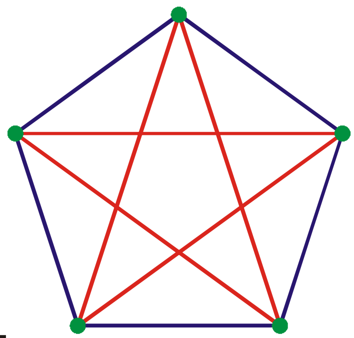
همان گونه که می بینید یالهای $e_{2,3}, e_{1,4}$ هم دیگر ر ادر نقطه‌ی قطع کرده اند. با رسم مجدد این گراف به صورت زیر ترسیمی از این گـراف بـه دست می آوریم که هیچ دو یالی همدیگر را قطع نکنند:



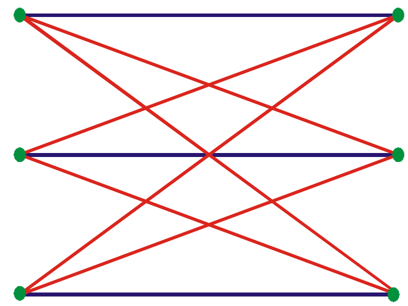


حال آیا به نظر شما این امر را می توان برای K_5 و یا $K_{2,3}$ هم به کاربرد!

یعنی گرافهای $K_{2,3}, K_5$ را به گونه ای بکشیم (روی صفحه) به طوری که هیچ در آنها همدیگر را قطع نکنند؟ (امتحان کنید)



K_5



$K_{3,3}$

شاید همان گونه که تاکنون خود متوجه شده اید در این فصل می خواهیم گرافهـا را از دیـد هندسـی بررسی کنیم. آنچه تا به حال از گرافها می خواندیم و می دیدیم و اثبات می کردیم تنها مجموعه هایی بودنـد از رئوس و یالها که به طور مجرد در نظر می گرفتیم. هیچ گاه برایمان مهم نبود که یک گراف یالهایش همدیگر را قطع کنند یا نه. اگر گراف را روی کره می کشیدیم یا اینکه روی چنبره (مانند تیوپ دو چرخـه) تفـاوتی نمی کرد. ولی حال می خواهیم این تفاوتها و قضایای مربوط به آن را بیابیم که در واقع مطالعه‌ی گرافها از دید هندسی و توپولوژی می باشد.

گراف های مسطح

تعریف :

در مقدمه دیدیم که گراف K_4 را می توانید روی سطح کاغذ به گونـه ای کـشید کـه هـیچ دویـالی یکدیگر را قطع نکنند. به این گونه گرافها، گراف مسطح گوییم:

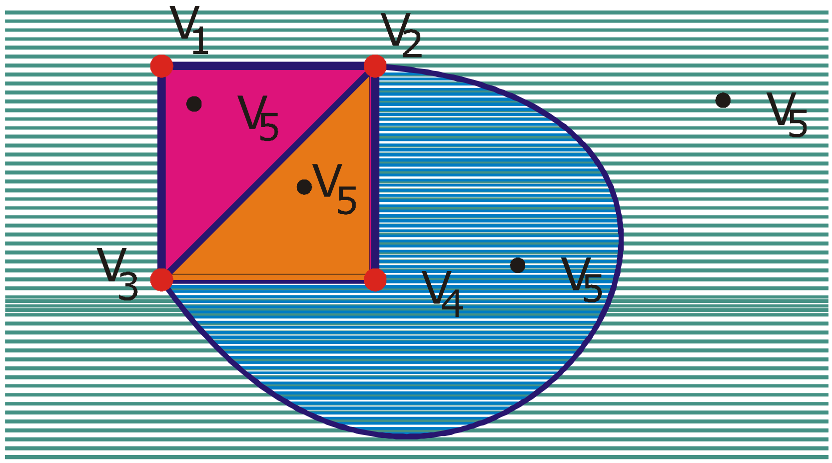
تعریف. گراف G را یک گراف مسطح گوییم هر گاه بتوان آن را روی سطح صاف (و یا روی سطح کره) به گونه ای رسم کرد که هیچ دو یالی یکدیگر را قطع نکنند.

همان گونه که در تعریف می بینید، در واقع مسطح بودن گراف معادل است با این کـه گـراف را بتـوان روی کره رسم کرد. این که گراف را روی کره ترسیم کنیم، فوایدی حاصل می آورد که در برخی محاسبات آنها خواهیم دید.

و اما اولین سوالی که به ذهن خطور می کند این است که آیا هر گرافی، یک گراف مسطح است یا نه؟!

اگر همان طور که در مقدمه آمد سعی کرده باشید گراف K_5 را روی صفحه رسم کنید (از این به بعد منظـور از رسم کردن گراف روی صفحه این است که گراف طوری رسم شود که هیچ دو یالی همدیگر را قطع نکنند). حتی اگر مدت زیادی به آن ور رفته باشید شکست خورده اید. کمی بعـد (همـین بخـش، بـه کمـک برخـی تکنیکها و قضایا اثبات خواهیم کرد که $K_{3,3}$،K_5 و بسیاری گرافهای دیگر مسطح نیستند. البته برای اینکه کمی قانع شوید نامسطح بودن K_5 را همان طوری که در زیر ذکر شده است،می توانید به طور شهودی قبول کنید:

یک گراف K_4 روی صفحه رسم می کنیم و نواحی بین یالها را برای روشنتر شدن رنگ می کنیم:



می دانیم که K_4 جزیی از گراف K_5 است پس برای رسم یک گراف K_5 کافیست که یـک راس V_5 به K_4 بیفزاییم سپس با کامل کردن گراف و رسم یالهای باقی مانده، گراف K_5 را بدست آوریم. همان گونـه که در شکل می بینید راس V_5 در یکی از نواحی سبز، آبی، نارنجی یا بنفش باید بیافتد چـرا کـه جـز ایـن 4 ناحیه، ناحیه ی دیگری در صفحه نداریم!

حال با آزمون و خطا مساله برایمان روشن خواهد گشت. مثلاً فرض کنید در ناحیه ی به رنگ نـارنجی باشد. آیا می توانید V_5را به V_1 رسم کنید طوری که با هیچ یالی برخورد نداشته باشد؟ من که این طور فکـر نمی کنم! بررسی بقیه نواحی را برعهده ی شما می گذارم. حال باید به من حق بدهید که که بگویم:

K_n گراف مسطح نیست (هر گاه $n \geq 5$, $n \in$)

مـساله. ماننـد روشـی کـه بـرای K_5 ذکـر شـد و بـه طـور شـهودی اثبـات کنیـد کـه $k_{3,3}$ و نیز $K_{n,m}$ $(n, m \geq 3)$ گراف مسطح نیستند.

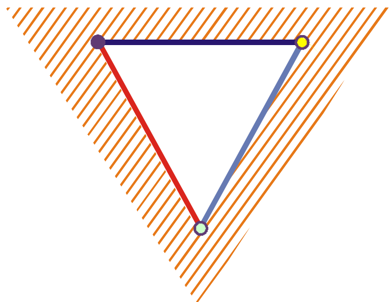
- لازم به ذکر است که از قضیه مربوط به توپولوژی که بالا استفاده کردیم با عنوان قضیه ی خم ژردان (*Jodan Cure theorem*) که بیان می دارد از یک خم بسته روی صفحه یک نقطه را

از درون خم نمی توان به نقطه ای خارج از خم با خطی وصل کرد طوری که خط واصل دو نقطه خم را قطع نکند.

قضیه اویلر

گراف K_3 را در نظر می گیریم – در واقع یک مثلث است که صفحه را به دو قسمت تقسیم کرده است–

اگر بخواهیم اجزای صفحه را با توجه به K_3 تقسیم کنیم آنچه خواهیم داشت عبارتند از : **3** راس، **3** یـال و **3**



وجه که در شکل با رنگهای متفاوت مشخص شده اند.

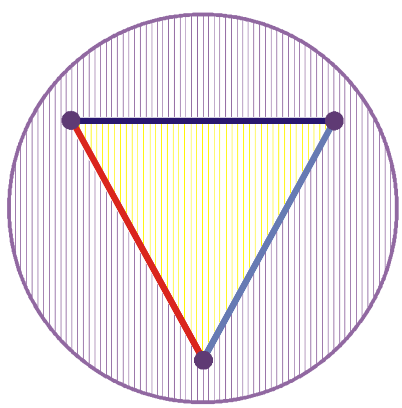
تعداد رئوس را با v، تعداد یالها را با e و تعداد

سطوح را با f نشان می دهیم. یعنی در K_3

$v=3$ و $e=3$ و $f=2$

اگر فکر می کنید در مورد تعداد وجه ها گیج می شوید می توانید از این به بعد گرافتـان را روی یـک

کره فرض کنید. در این صورت شاید از لحاظ شهودی بهتر باشد:



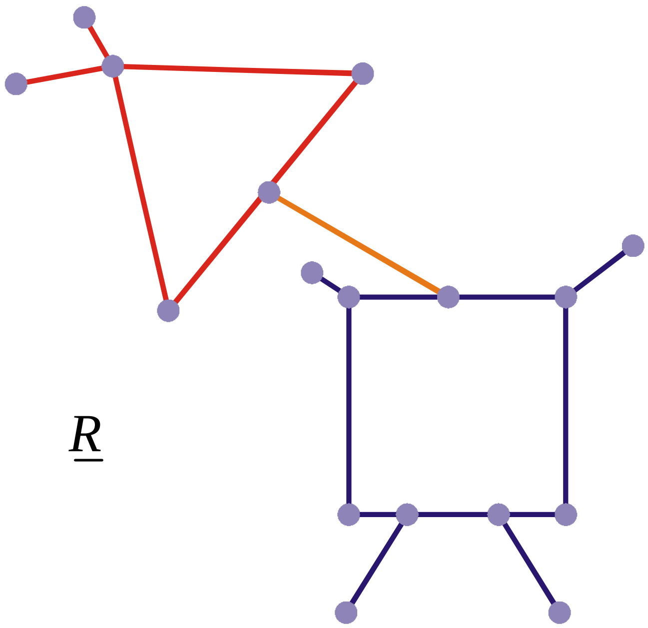
حال یک گراف دلخواه بکشید. مثلاً من گراف زیر را انتخاب می کنم.

حالا e,v را برای گرافی که رسم کرده اید حساب کنید. مثلاً من گراف زیر ($\boldsymbol{R}$) را انتخاب مـی کـنم:

مثلاً من خواهم داشت

$v=17$ و $e=18$ و $f=3$

یک چیز عجیب!



عدد زیر (C) را برای این گراف و K_3 حساب می کنیم.

$$C=v-e+f$$

برای گراف K_3 : $C=3-3+2=2$

برای گراف R : $C=17-18+3=2$

می بینیم که برای هر دو گراف عدد C برابر 2 به دست می آید- اگر شما به عدد 2 نرسیده اید دوبـاره بشمارید و نیز دقت کنید هیچ دو یالی همدیگر را قطع نکرده باشند- این موضوع در نظر اول عجیب می رسد ولی با اثبات قضیه زیر در خواهیم یافت که عدد C برای هر گراف مسطح 2 می باشد.

این قضیه به قضیه ی چند وجهی اولر معروف است که اویلر آن را در سال **1750** کشف کرده است.

البته ریاضیدانان قبل از اویلر مانند دکارت و فرما نیز از این موضوع بی اطلاع نبوده اند ولی آنها قضیه را به صورت کلی و در همه ی حالات و با اثبات کامل نمی دانسته اند. شبیه این فرمول در مواقع تعمیم آن در توپولوژی جبری (یکی از شاخه های مهم ریاضی محض) با عنوان قضیه اویلر-پوانکاره معروف است.

قضیه. (فرمول چند وجهی اویلر). اگر گراف مسطح G روی صفحه (کره) رسم شده باشد به طـوری که دارای V راس، e یال و f وجه باشد آنگاه داریم:

$$C(G) = v - e + f = 2$$

اثبات. حکم را با استقرا بر روی تعداد دورهای گراف اثبات می کنیم. ابتدا فرض می کنیم که G دارای هیچ دوری نباشد، یعنی G یک درخت است. به راحتی دیده می شود که $f = 1$ و $v = e + 1$ در نتیجه

$$C(G) = v - e + f = e + 1 - e + 1 = 2$$

حال فرض می کنیم فرمول اویلر برای گرافهای همبند ترسـیم شـده روی صـفحه بـا کمتـر از n دور صحیح باشد. گراف همبند G شامل n دور را در نظر می گیریم که در آن f, e, v را مانند قبـل، بـه ترتیـب تعداد راس ها، یالها و وجه ها فرض می کنیم.یک وجه گراف مانند C را در نظر می گیریم که در واقع یک دور نیز می باشد. یکی از اضلاع وجه C را که E, P نام گذاری می کنیم نیز فرض می گیریم. یال P در واقع مرز بین وجه C با وجه دیگری مانند C' است. پس اگر یـال P را فـرض کنـیم گـراف حاصـل یعنـی $G - p$ دارای v راس، $e - 1$ یال و $f - 1$ وجه خواهد شد (وجوه C و C' یکی شده اند). پس از تعداد دورها نیـز یکی کم می شود چرا که از تعداد وجه ها یکی کم شده – پس فرمول اویلر طبق فرض اسـتقرا بـرای $G - P$ صدق خواهد کرد.

یعنی داریم:

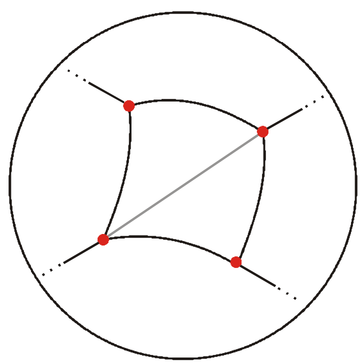
$$v - (e - 1) + (f - 1) = 2$$

پس خواهیم داشت:

$$v - e + f = 2$$

پس طبق استقرا حکم نتیجه می شود.

تعریف: گراف مسطح G را یک ماکسیمال مسطح نامیم هر گاه با اضافه کردن یک یال بین هر کدام از دو راس غیر مجاور، گراف G به گرافی نامسطح تبدیل شود. گراف مکعبی زیر یک گراف مسطح نیست چــرا که با اضافه کردن یالی که به عنوان e مشخص شده است، گراف مسطح باقی می ماند، گراف **8** وجهــی یــک گراف ماکسیمال مسطح است، هم چنین $K_5 - e$ نیز یک گراف ماکسیمال مسطح است (e هر یک از یالهای K_5 می تواند باشد.). گراف K_4 نیز یک گراف ماکسیمال مسطح است. با توجه به مثالهــای فــوق مــشاهده شکل های آنها ویژگی مشترکی مابین این گرافهای ماکسیمال مسطح می بینیم که آن مثلثی بودن هر یــک از وجوه این گرافهاست- در واقع به سادگی می بینیم که این ویژگی در میان همه ی گرافهــای نامــسطح وجــود دارد- چرا که اگر وجهی غیر مثلثی وجود داشته باشد، می توان هر یک از قطرهای این وجه در صورت رســم شدن مسطح بودن گراف به هم نمی خورد. مساله را در شکل زیر بهتر می توانید ببینید:



قضیه. اگر G یک گراف ماکسیمال مسطح با v راس و e یال باشد و $V \geq 3$ آنگاه $e = 3V - 6$.

اثبات. گراف ماکسیمال مسطح G با f وجه را در نظر گیرید. هر وجه آن بزرگتر یا مساوی**6** می باشد و G دارای V راس و e یال است. پس داریم:

$$2q = \sum_{P \in V} deg\,(p) \geq 6V$$

بنابراین:

$e \geq 3V$

که تناقض با ین قضیه است که در گراف های مسطح $e \leq 3V - 6$.

قضیه. G را گرافی ماکسیمال مسطح با V راس و e یال در نظر می گیریم که $V \geq 4$.

V_iرا راسهای از درجه ی i نام گذاری می کنیم. خواهیم داشت:

$$3V_3 + 2V_4 + V_5 = 12 + V_7 + 2V_8 + 3V_9 + 4V_{10} + \ldots$$

اثبات. داریم

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \ldots$$

,

$$2e = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots$$

از آنجا که G ماکسیمال مسطح است خواهیم داشت $e = 3V - 6$، حال معادله ی اول را در **6** ضرب کرده و معادله ی دوم را از آن کم می کنیم. در نتیجه :

$$6V - 2e = 3V_3 + 2V_4 + V_5 - V_7 - 2V_8 - 3V_9 - 4V_{10} \ldots$$

$$\Rightarrow 3V_3 + 2V_4 + V_5 = 12 + V_7 + 2V_8 + 3V_9 + 4V_{10} + \ldots$$

حال این مساله را می خواهیم برای گراف های دو بخشی بررسی کنیم. در اولین نگاه می بینیم که گراف های دو بخشی هیچ مثلثی را شامل نمی شوند. پس هیچ گراف دو بخشی ماکسیمال مسطح وجود ندارد. گراف مکعبی مثالی از یک گراف دو بخشی مسطح است که دیدیم ماکسیمال مسطح نیست. در واقع با اضافه کردن هر یال به این گراف، گراف از حالت دو بخشی بودن یا مسطح بودن خارج می شود. حال قضیه ی زیر را

اثبات می کنیم:

قضیه. هر گاه G گرافی مسطح و دو بخشی با v راس و e یال باشد و $V \geq 3$ خواهیم داشت $e \leq 2V-4$.

اثبات. اثبات مانند معادل همین قضیه برای گراف های مسطح است که کمی قبل اثبات کردیم.

با این تفاوت که در اینجا در حالت ماکسیمال همه ی وجه ها مربعی شکل هستند. پس خواهیم داشت:

$$2e \geq 4f \Rightarrow e \geq 2f$$

یعنی :

$$v-e+e/2 \geq 2 \Rightarrow 2v-e \geq 4 \Rightarrow e \leq 2v-4$$

قضیه. گراف دو بخشی کامل $K_{3,3}$ نامسطح است.

اثبات. در $K_{3,3}$ داریم: $e=9, v=6 \Leftarrow$

$$9 \geq 2\times 6-4$$

قضیه. هر گراف مسطحی شامل حداقل یک راس از درجه ی کوچکتر یا مساوی 5 می باشد.

اثبات. فرض کنیم این چنین نباشد - یعنی گراف مسطح G موجود است که درجه هر راس آن طبق آنچه که در بالا گفته شد یک مثلث بوده و دقیقاً بوسیله 3 یال احاطه گشته است.

از آنجا که هر یال متعلق به دو وجه است خواهیم داشت $2e=3f$. برای آگاهی از درستی این تساوی وجه ها و یال ها را از دو راه می شمریم. فرض کنیم h تعداد دوتایی های (t,p) باشد که در آن t یک مثلث و p یالی از t است. از آنجا که هر مثلث شامل 3 یال و در کل f مثلث وجود دارد خواهیم داشت $h=3f$.

همچنین هر یال گراف در بین دو وجه مشترک می باشد. پس اگر بخواهیم h را با شمردن یالها حساب کنیم

کافیست هر یال را دو بار بشماریم، یعنی $h = 2e$:

پس داریم:

$$3f = 2e \Rightarrow f = \frac{2}{3}e$$

از طرفی داریم گراف G مسطح است یعنی طبق قضیه قبل:

$$V - e + f = 2$$

خواهیم داشت:

$$V - e + \frac{2}{3}e = 2 \Rightarrow 3V - e = 6 \Rightarrow e = 3V - 6$$

قضیه بعد نتیجه ی فوری این قضیه است:

قضیه. هیچ گراف مسطحی با $V \geq 3$ راس، بیش از $3V - 6$ یال ندارد.

قضیه. گراف K_5 مسطح نیست.

اثبات. در گراف K_5 داریم $V = 5, e = 10$ یعنی $e > 3 \times 5 - 6 = 9$ پس طبق قضیه ی قبل K_5 نامسطح است.

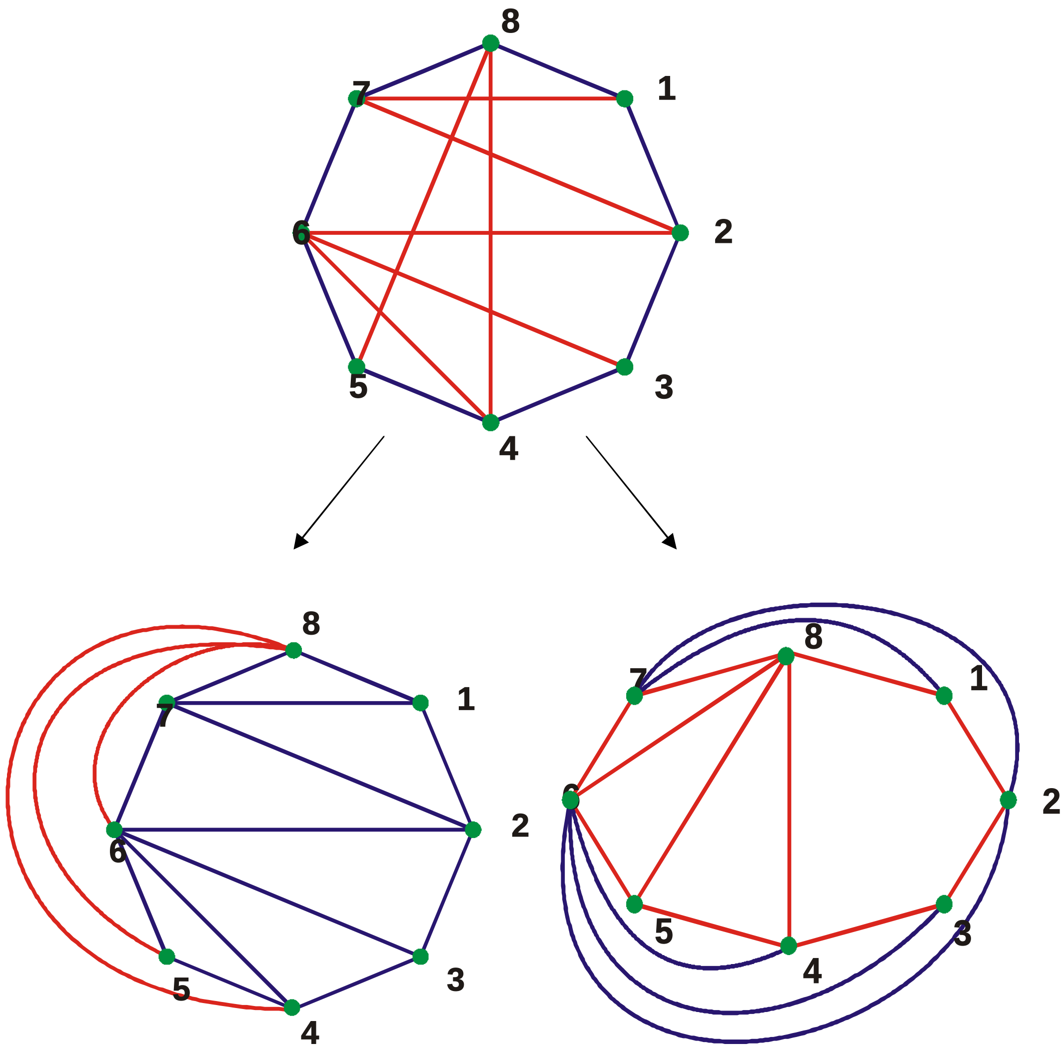
بدیهی و مشهود است که هر گرافی که شامل زیر گرافی غیر مسطح باشد، خود غیر مسطح است.

اما قضیه ی زیر باید برای شما جالب باشد. یک طرف قضیه حالت خاص گزاره ی بالاست و بدیهی می باشد، اما طرف عکس آن نسبتاً دشوار بوده و از اثبات آن می پرهیزیم:

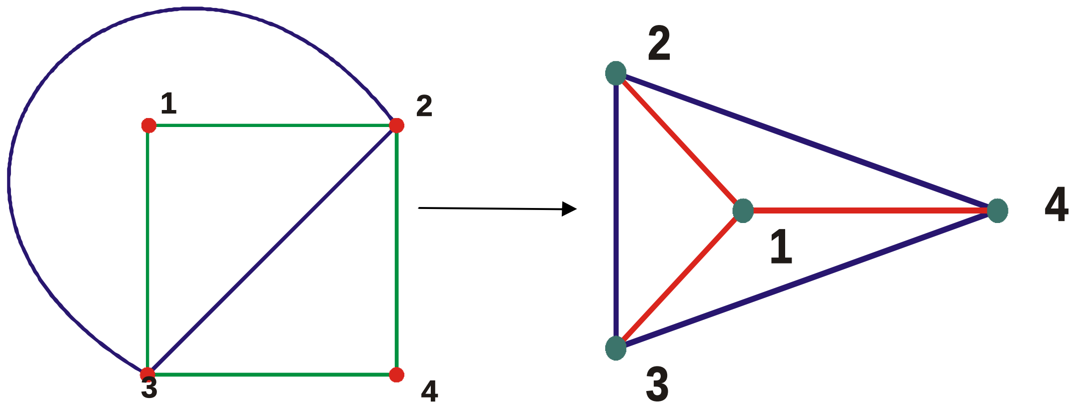
قضیه (کوراتووسکی $Kuratowski$). گراف G مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیر گراف یک ریخت با K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

نمایش گراف مسطح با خطوط راست

گراف زیر یک گراف مسطح است. راه های متفاوتی برای رسم گراف زیر روی صفحه وجود دارند که هیچ دو یالی هم دیگر را قطع نکنند. مانند آنهایی که در شکل می بینید.



اگر راس های یک گراف را نیز جابجا کنیم بعضی اوقات می توانیم نمایشی از گراف مسطح بسازیم که همه ی یالهای آن خطوط راست باشند مانند شکل زیر:



در سالی **1936**، واگنر $(Wagner)$ اثبات کرد که چنین خاصیتی برای هر گراف مسطح وجود دارد.

این نتیجه توسط فری $(Fary)$ نیز به طور مستقل اثبات شد. یعنی قضیه ی زیر برقرار است.

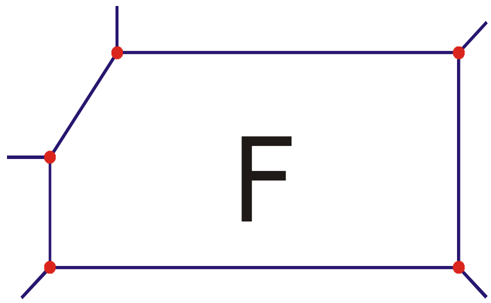
قضیه. هر گراف مسطح یک نمایش روی صفحه دارد به قسمی که هر یال آن یک خط راست است.

به چنین نمایشی – یعنی هر نمایش گراف که در آن یالها خطوطی راست اند، یک نمایش $Stretch$ گویند– به هر گرافی که نمایش $Stretch$ داشته باشد یک گراف $Stretchable$ گوییم. در واقع واگنر ثابت کرد که هر گراف مسطح یک گراف $Stretchable$ است. وجه F از گراف را محدب گوییم هر گاه بین هر دو نقطه داخل یا روی این وجه پاره خطی رسم کنیم، پاره خط به طور کامل داخل وجه بیافتد. در شکل وجه های محدب و غیر محدب را می بینید:

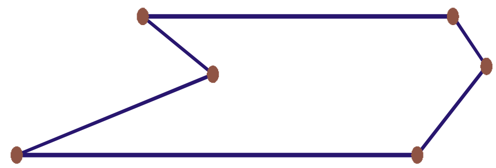
اثبات. اثبات به استقرا روی تعداد راس های گراف صورت می پذیرد. پایه ی استقرا گراف K_4 است. براحتی برای K_4 و زیر گراف های آن دیده می شود که همگی $Stretchable$ هستند.

حال فرض کنید که G گرافی با P راس باشد که $P > 4$ و همه ی گراف های با کمتر از P راس $Stretchable$ باشند. اگر G یک گراف ماکسیمال مسطح نباشد، به قدری به آن یال اضافه می کنیم که تبدیل به یک گراف ماکسیمال مسطح شود. پس می توان G را گرافی ماکسیمال مسطح فرض کرد بدون

اینکه از مساله چیزی کم شود. حال طبق قضیه گراف G حداقل دارای 4 راس از درجه کوچکتر یا مساوی 5 است.



وجه محدب



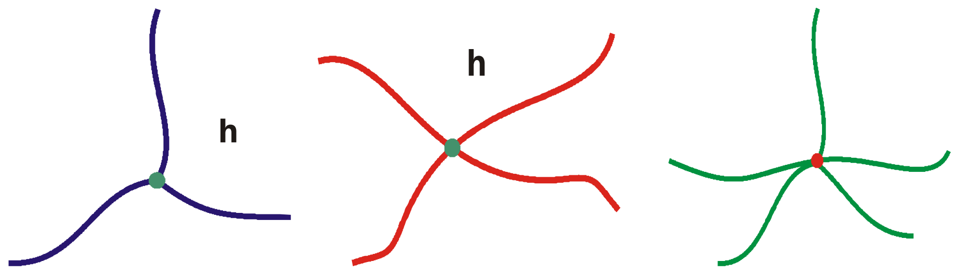
وجه نامحدب

همه ی درجه های گراف G به دلیل ماکسیمال مسطح بودن، از جمله وجه بیرونی گراف، به صورت مثلث اند. یعنی وجه بیرونی گراف سه راس دارد، پس یکی از چهار راسی که حداکثر درجه آنها 5 می باشد روی این وجه نیست. این راس را h می نامیم.

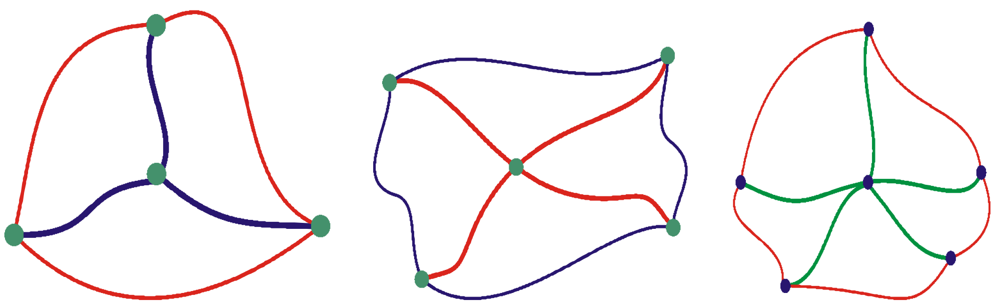
از آنجا که راس h دارای درجه ای برابر با سه، چهار و یا پنج می باشد، همان طور که در سطرهای اول و دوم در شکل زیر می بینید،این راس محل برخورد سه، چهار و یا پنج مثلث است. حال گراف $G-h$ را در نظر گیرید (سطر سوم شکل).

گراف $G-h$ مسطح است و تعداد راس های آن از G کمتر است. یعنی طبق فرض استقرا $G-h$، *Stretchable*، است همان گونه که در سطر چهارم شکل می بینید. پس $G-h$ را با خطوط راست روی صفحه رسم می کنیم که یک وجه (همان وجهی که در سطر چهارم شکل مشخص شده) به نام R را شامل می شود و R سه ضلعی، چهار ضلعی و یا پنج ضلعی است- اگر R یک شکل محدب باشد آن گاه راس

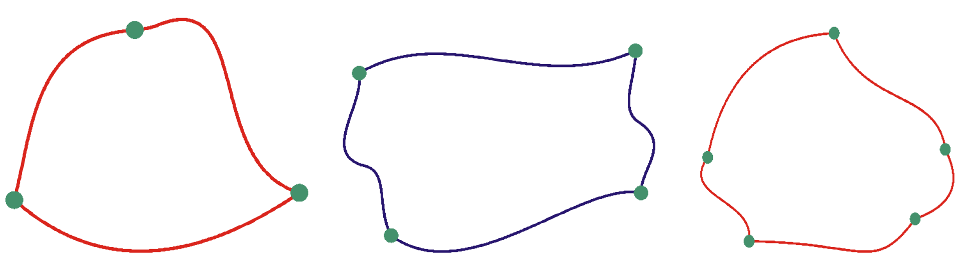
h را در داخل R می کشیم و سپس یالهای حذف شده را نیز دوباره رسم می کنیم (سطر پنجم شکل) – اما اگر R محدب نباشد، باید راس h را در ناحیه ی هاشور خورده مشخص شده در سطر ششم شکل برای چهار ضلعی ها و سطرهای هفتم تا نهم شکل برای پنجم ضلعی ها انتخاب کنیم. استقرا کامل شده و حکم اثبات می گردد.



سطر 1

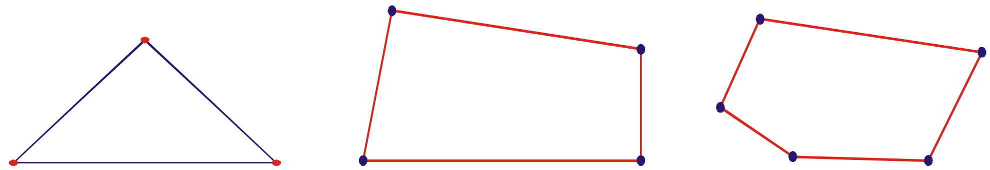


سطر 2

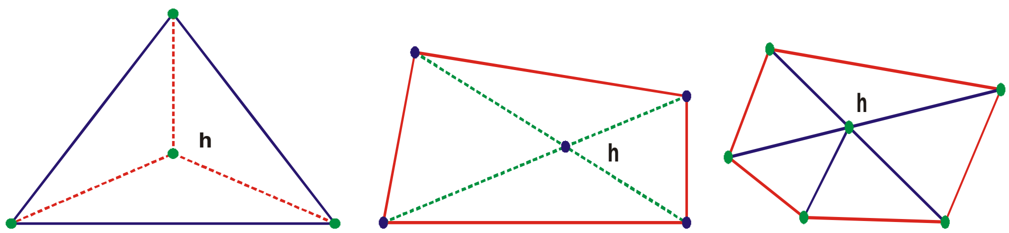


سطر 3

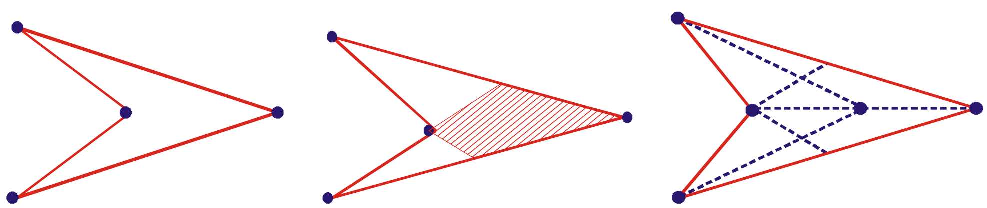
سطر 4



سطر 5



سطر 6



سطر 7