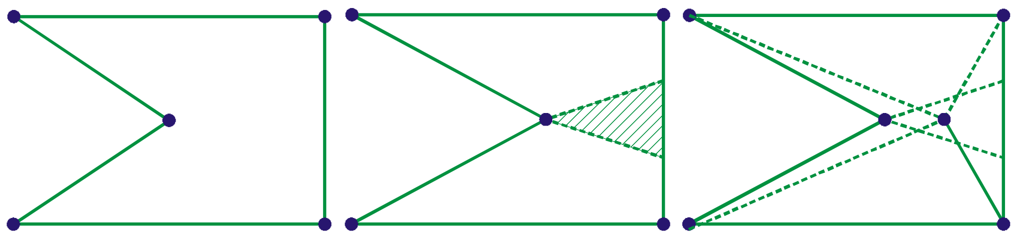
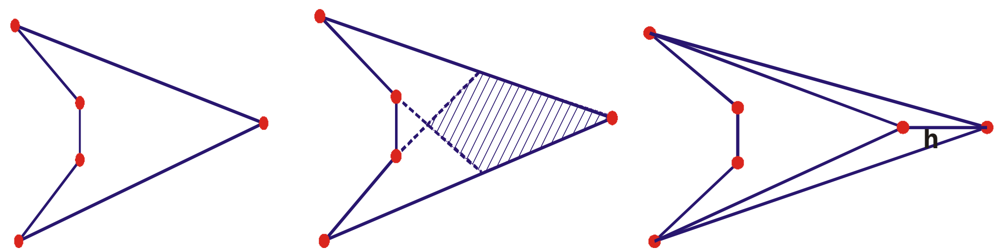


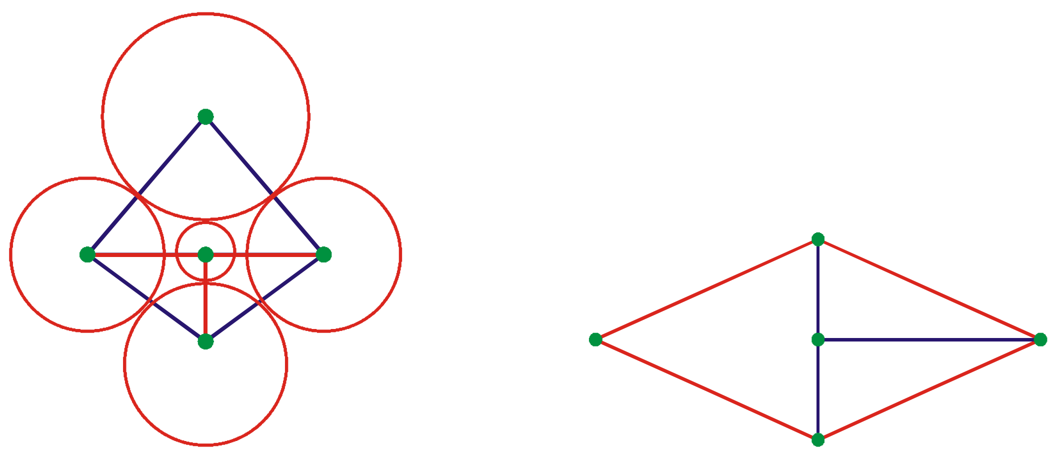
سطر 8



سطر 9

گراف های سکه ای

به شکل زیر توجه کنید:



می بینیم که راس های گراف G را می توان بدون تغییر مکان به عنوان مرکز تعدادی دایره ی مماس روی صفحه در نظر گرفت- و همچنین بین دو راس گراف یک یال می گذرد اگر و تنها اگر دایره هایی که آن دو راس مذکور مرکز آنها هستند با هم مماس باشند به این نوع گراف ها، گراف سکه ای، گویند- حال آیا فکر می کنید این مساله برای هر گراف مسطحی صدق می کند؟ یعنی هر گراف مسطحی یک گراف سکه ای است؟ جواب مشکل ولی زیباست.

سال **1935**، کب $(koebe)$ قضیه ی زیر را بوسیله ی آنالیز مختلط حل کرد:

قضیه. هر گراف مسطح یک گراف سکه ای است.

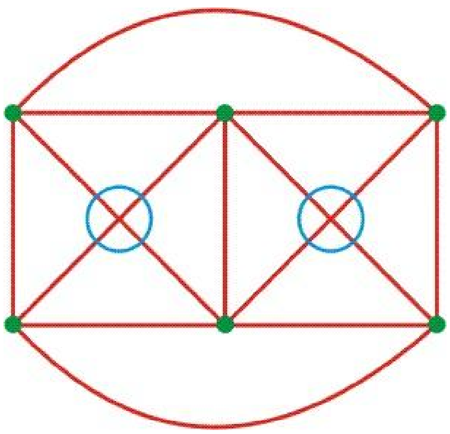
حال هر گاه گرافی را بتوان به صورت گراف سکه ای نشان داد به قسمی که دایره هایی که راس های گراف مرکز آنهایند با هم مساوی باشند، یعنی شعاع دایره ها همگی یکسان باشند، به این نوع گراف ها، گراف

های پنی $\left(Penny \quad Graphs \right)$ گویند – در تمرینات با برخی از گراف های پنی آشنا می شوید–

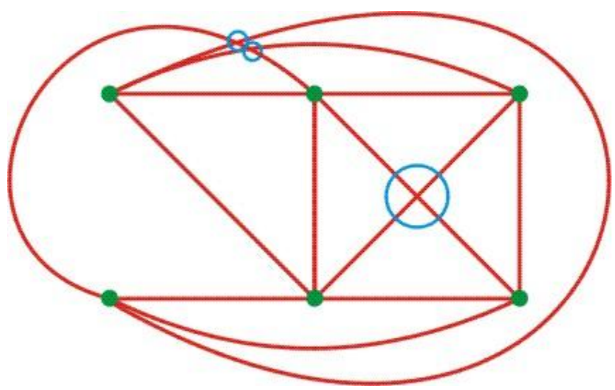
عدد تقاطع $(Crossing\ \ Number)$

دیدیم که گرافهایی هستند که می شود آنها را در صفحه رسم کرد به طوری که هیچ دو یالی همـدیگر را قطع نکنند – اما اگر گرافهای نامسطح را روی صفحه رسم کنیم چند یال به اجبار همدیگر را قطع خواهنـد کرد. حال مساله ای که اینجا می خواهیم بررسی کنیم تعداد این تقاطع ها *(Crossing)* است.

به دو گراف زیر توجه کنید:



(الف)

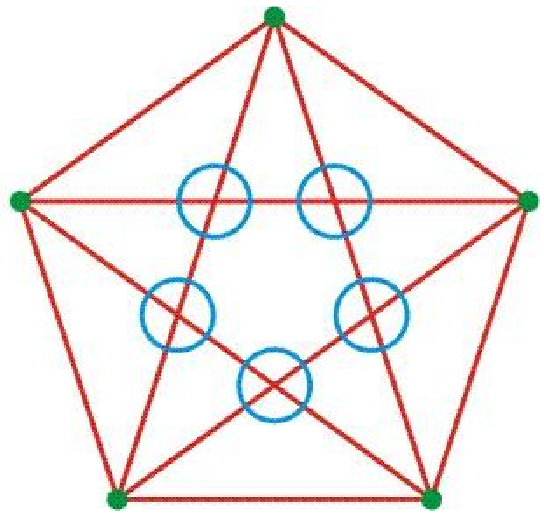


(ب)

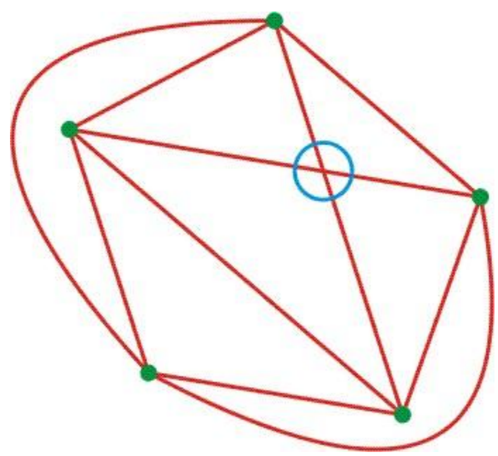
در واقع هر دو یک گراف را نشان می دهند، ولی در شکل (الف) تعداد تقاطع ها یکی در حالی کـه در (ب) 2 تا می باشند.

اما به نظر شما آیا می توان این گراف را به گونه ای رسم کرد که یک تقاطع داشـته باشـد – در واقـع چیزی که برای ما در این فصل جالب است، شکلی از گراف است که کمترین تعداد تقاطع ها در آن یافت شود – به گراف K_5 دوباره نظری می اندازیم:

K_5



در شکل بالا 5 تقاطع مشخص اند. حال همین گراف را به گونه ی زیر دوباره می کشیم:

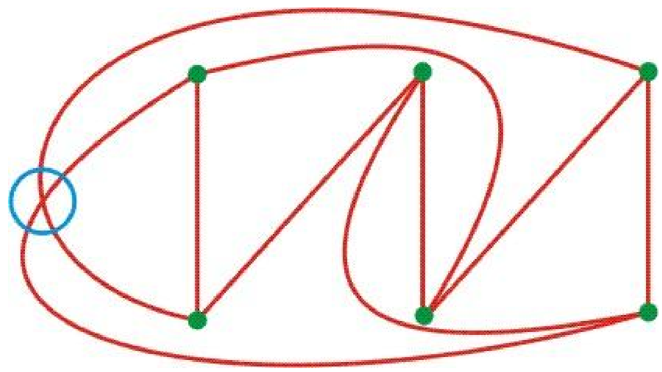


می بینیم که گراف K_5 را طوری رسم کردیم که تنها دارای یک تقاطع می باشد. از آنجا که K_5 یک گراف نامسطح است پس کمترین مقدار ممکن برای تعداد تقاطع های رسم این گراف یک می باشد. به این عدد یعنی عدد "یک" به اصطلاح عدد تقاطع یا $Cros\sin gNamber$ گراف K_5 گوییم.

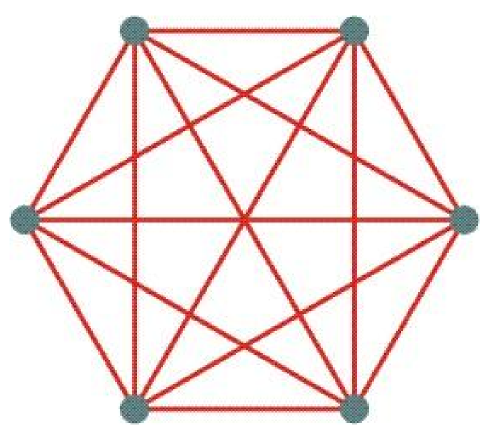
تعریف. عدد تقاطع یا $\left(Crossing\ \ Number\right)$ یک گراف مانند G عبارتست از کمترین مقدار ممکن

برای تعداد تقاطع های یالهای گراف G در رسم های مختلف گراف G در صفحه و آن را با $C_r(G)$ نمــایش می دهند.

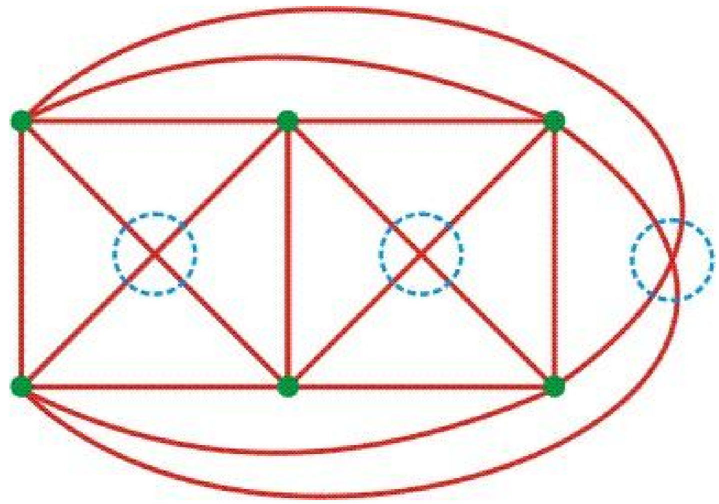
شکل زیر نشان می دهد که عدد تقاطع $K_{3,3}$ برابر 1 است. چرا؟



حال می خواهیم عدد تقاطع K_6 را بدست آوریم:

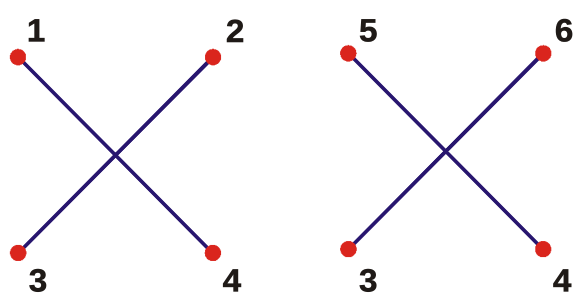


K_6 را می توان به صورت زیر نیز کشید که تعداد تقاطع های آن در این شکل 3 می باشد.



حال فرض می کنیم که K_6 را بتوان به گونه ای رسم کرد که دارای 2 تقاطع باشد. راس هــا را شــماره گذاری می کنیم.

فرض کنیم دو تقاطع مذکور به شکل زیر باشند:



طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو راس از گراف در هر دو تقاطع دخالت دارند – (اگر یالی با یال دیگــر تقاطع داشته باشد، دو راس لبه ی یال را گوییم در تقاطع دخالت دارند). حال اگر از این گراف راس شماره 4 را حذف کنیم چه می شود. دقت کنید که وقتی که راسی را حذف می کنیم یالهای مرتبط با آن نیز خــود بــه خود حذف می شوند. آنچه از گراف می ماند در واقع K_5 است. اما برسر دو تقاطع چه می آینــد. مــسلماً بــا

حذف راس 4 یالهای (4و1) و (4و5) نیز حذف گشته و در نتیجه هر دو تقاطع از بین می روند. یعنی توانسته ایم K_5 را روی صفحه مسطح رسم کنیم که می دانیم K_5 نا مسطح بوده و امکان ندارد.

در نتیجه K_6 را با کمتر از 3 تقاطع نمی توان رسم کرد. پس خواهیم داشت:

$$C_r\left(K_6\right)=3$$

دیدیم که محاسبه ی عدد تقاطع یک گراف نسبتاً دشوار است با این حال روابط و نامساویهای زیر برای برخی از گراف ها موجوداند که بدون اثبات آنها را ذکر می کنیم:

(1) $C_r\left(K_n\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right]$, برای هر n

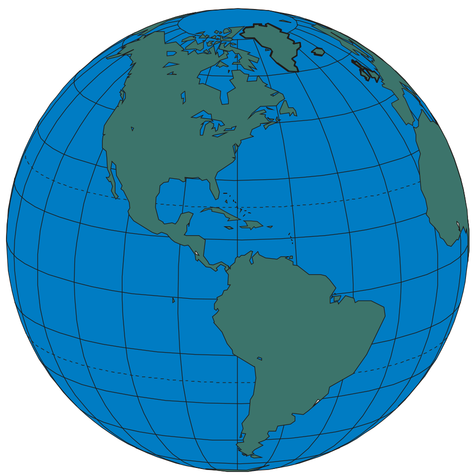
(2) $C_r\left(K_{m,n}\right)\le\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$, برای هر m,n

(3) $C_r\left(K_{3,n}\right)=\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$, برای هر n

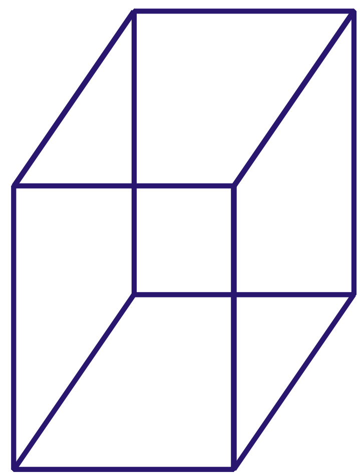
(4) $C_r\left(K_{4,n}\right)=2\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$, برای هر n

گونای گراف

فرض کنید کره و مکعبی که در شکل زیر کشیده شده اند، هر دو توخالی بوده و از جنس لاستیک بسیار نرمی ساخته شده باشند.

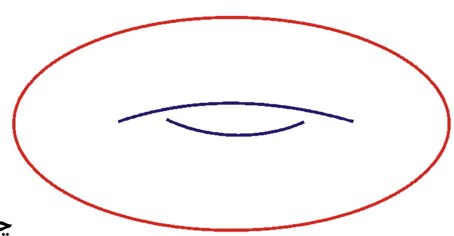


کره



مکعب

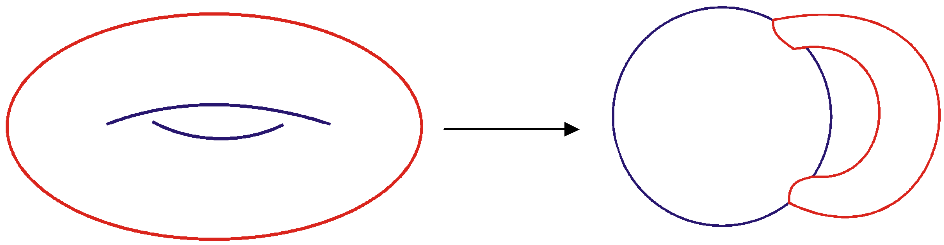
می توان کره را بدون پاره شدن و با فشردن یا کشیدن آن به مکعب تبدیل کرد. ولی‌آیا می توان کـره را بدون پاره کردن به چنبره ی زیر تبدیل کرد؟



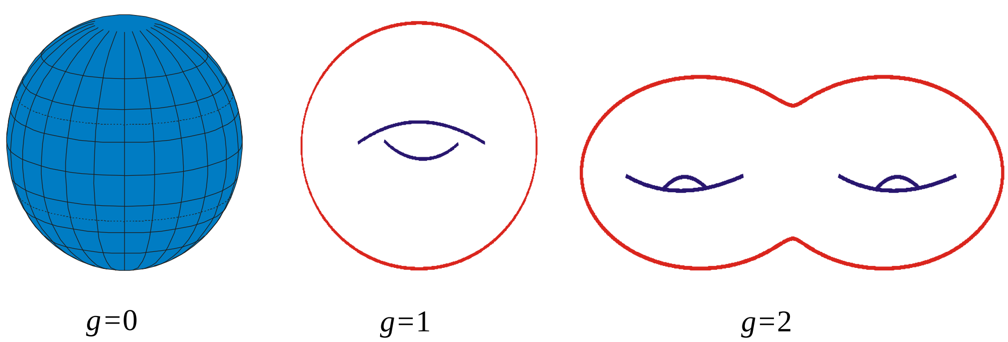
چنبره

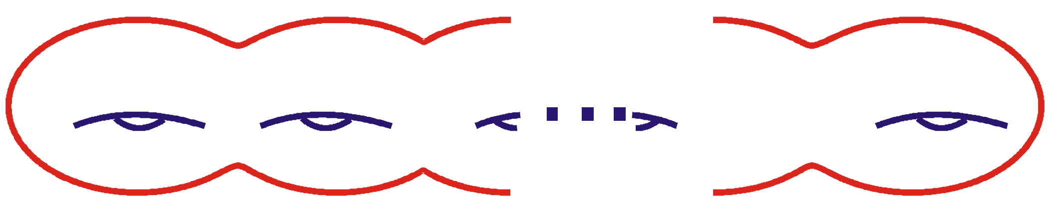
مطمئن باشید این کار نشدنی است- اثبات آن ساده است و در واقع از طریق تعمیم قضیه ی چند گونای

اویلر بدست می آید. چنبره را می توان طوری تغییر شکل داد که تبدیل به یک کره ی دســته دار شــود یعنــی چیزی شبیه به یک قوری بدون لوله و درا!



آنچه که از قضیه ی مشخصه های اویلر برای رویه های دو بعدی بدست می آید این است که هیچ دو رویه ای که از چسباندن n دسته به کره و دیگری از چسباندن m دسته به کره حاصل می شوند،در صورت مساوی نبودن m,n ، قابل تبدیل به هم نیستند. به تعداد دسته های یک روی، گونای $(genus)$ رویه گوینــد. گونــای رویه ی F را با $g(F)$ نشان می دهند.





رویه هایی که در شکل فوق مشاهده می کنید، در واقع هر 3 خاصیت زیر را دارا هستند:

1. همه آنها کراندارند – یعنی داخل یک کره ی به اندازه کافی بزرگ جا می شوند.
2. همه آنها از دو طرف تشکیل شده اند – یکی درون و یکی بیرون مثلاًیک مورچه بدون پاره کردن کره و یا هر یک از رویه های فوق، نمی تواند از ان خارج شود.
3. همه آنها سالم هستند. یعنی پارگی و یا سوراخی که موجب پنچر شدن آنها شود ندارند! رویه‌ای که دارای 3 شرط فوق باشد را یک رویه ی فشرده ی جهت پذیر می نامیم.

هرگاه بتوان دو رویه را طوری با کشیدن یا فشردن به هم تبدیل کرد که سوراخ یا پاره نشوند. گویند این دو رویه با هم، همسان ریخت اند. (برای درک بهتر می توانید فرض کنید که رویه ها از جنیس لاستیک نرم،نازک و بسیار مرغوب تهیه شده اند!). در واقع آنچه که قضیه ی اویلر به ما می گوید عبارت است از :

- دو رویه ی فشرده ی جهت پذیر همسان ریخت اند، اگر و تنها اگر گونای آن دو با هم مساوی باشد.

تعریف. گراف G را در نظر بگیرید. اگر G را بتوان روی سطحی با گونای n رسم کرد به گونه ای که هیچ دو یالی همدیگر را قطع نکنند، G را از گونای n می نامیم در صورتی که گراف G را نتوان روی سطحی با گونای $n-1$ رسم کرد به طوری هیچ دو یالی هم دیگر را قطع نکنند.

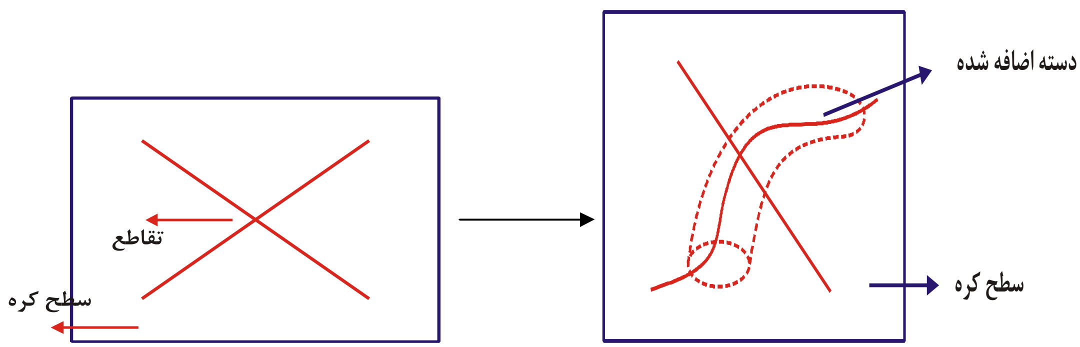
اگر گراف G از گونای n باشد، آنگاه می نویسیم: $g(G)=n$.

به طور مثال گراف های مسطح همگی از گونای صفر هستند.

قضیه. $g(G) \le C_r(G)$

برای اثبات کافی است ثابت کنیم که اگر گراف G روی کره رسم شده باشد، می توان به ازای هر تقاطع،

با اضافه کردن یک دسته به کره، گراف را دوباره طوری رسم کرد که تقاطع از بین برود. این امـر در شـکل زیـر مشخص شده است:



در واقع با اضافه کردن دسته، می توان یک یال مرتبط، تقاطع را از زیر دسته و دیگری را از روی دسـته عبور داد . دقت کنید که دسته ی اضافه شده در اینجا حکم پل را برای ما دارد.

از قضیه ی قبل به راحتی می توان دید که

$$g(K_{3,3}) = g(K_5) = 1$$

قضیه. G را گرافی همبند و از گونای n در نظر گیرید. اگر G دارای v راس، E یـال و F وجـه باشـد آنگاه:

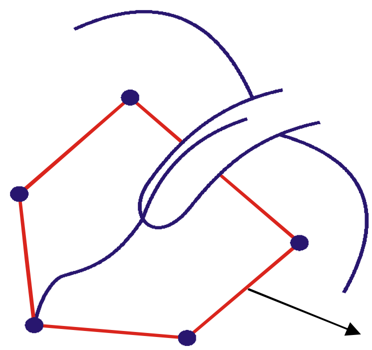
$$V - E + F = 2 - 2n$$

این قضیه همانا تعمیم قضیه ی چند وجهی اویلر است چرا که اگر گراف مسطح باشد در نتیجه گـراف از گونای صفر خواهد بود و تساوی برقرار است:

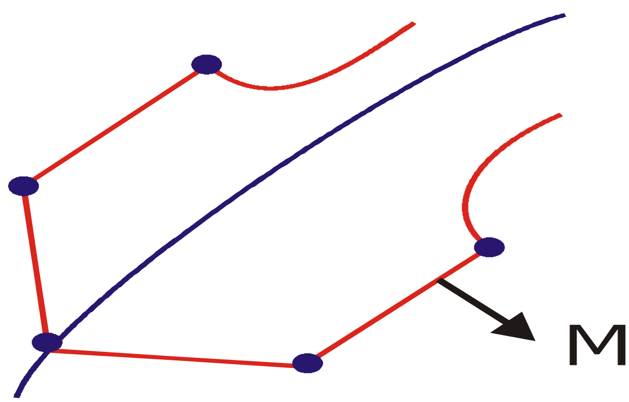
$$V - E + F = 2 - 2(0) = 2$$

اثبات. فرض کنید G را روی سطحی با گونای n رسم کرده اید. انتهای هر دسته مثلاً به شکل زیر مـی

باشد:



یک طرف دسته ی مذکور را آنقدر می کشیم که محل برخورد دسته با کره مدار M شود:



دسته ی فوق را از روی M برش می دهیم.

می دانیم برای کره، قضیه برقرار است. حال باید ببینیم با اضافه کردن دسته به کره چه اتفاقی می افتـد.

اگر دسته را به صورتی که محل تقاطع آن با کره یک وجه را کاملاً بپوشاند، یعنی روی یک مدار منطبـق شـود، می بینیم که تفاوت وجه های گراف از گرافی که روی کره است دو تا کمتر است که آن در همان محـل برخـورد دسته به کره است – پس به ازای اضافه کردن یک گونا به سطح، از تعداد وجه ها 2 تا کم می شود ولـی تعـداد

یالها و راسها ثابت می ماند. پس برای سطحی که n دسته دارد داریم:

$$V - E + F + 2n = 2$$

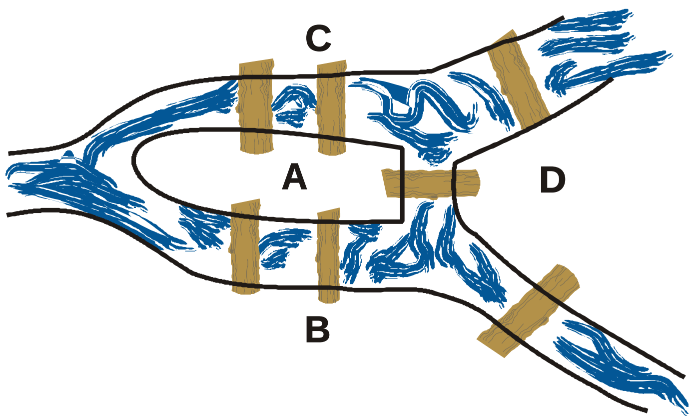
$$V - E + F = 2 - 2n$$

و اثبات کامل می شود.

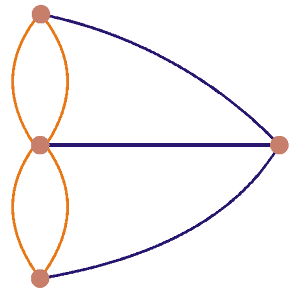
در اینجا به مثالهایی از گراف بر می خوریم که دارای خصوصیات جالب توجهی می باشند.

اول از همه به مسئله ای می پردازیم که سنگ بنای تشکیل تئوری گراف شد.

داستان از این قرار بود که بر روی رودخانه پرگل $(pregel)$ هفت پل کوینگسبرگ $(konigberg)$ به صورت شکل زیر ساخته شده بودند.



همانطور که از شکل معلوم می گردد این7 پل چهار خشکی D, C, B, A را به هم پیوند مــی دهنــد حال آنچه مردم را به خود مشغول کرده بود این بود که آیا می توان با شروع از یک و طی کردن تمام پل ها و هر پل فقط یک بار دوباره به همان خشکی بازگشت که اویلر با تبدیل این 7 پل به گراف زیر

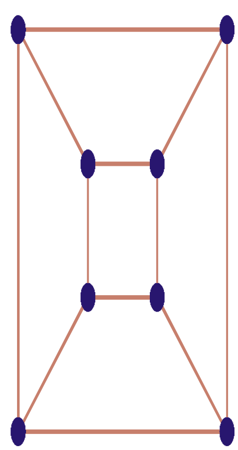


و سپس ارائه اولین تئوری گراف آن را حل و اثبات نمود.

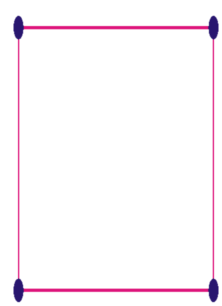
جواب این سوال در بخش گراف های اویلری داده خواهد شد لطفاً عجله نکنید.

و اما مثالهای زیبای دیگر گراف:

- گراف مربع و مکعب

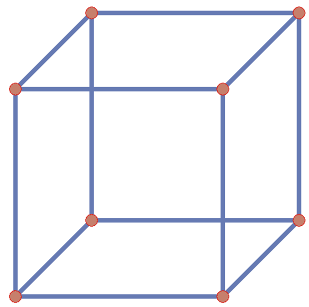


گراف مکعب

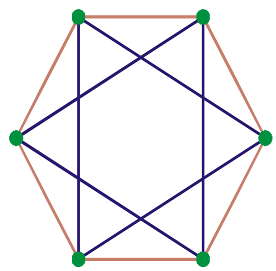


گراف مربع

که گراف زیر نیز مکعب می باشد یعنی با گراف بالا یکریخت است.

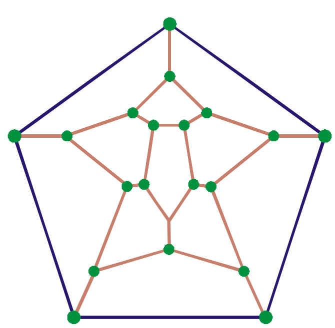


- **گراف هشت وجهی**



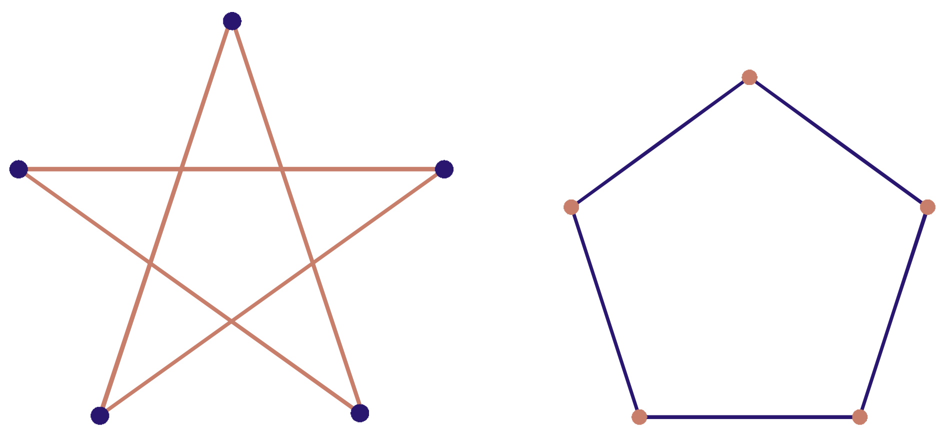
به نظر شما چرا این گراف 6 راسی را هشت وجهی نامیده اند؟ سعی کنید آن را در فضا مجسم کنید.

- **گراف دوازده وجهی**

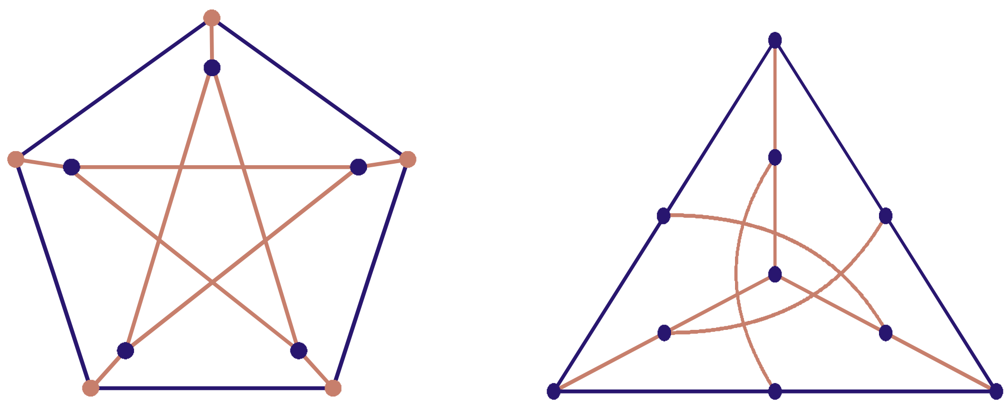


دقت کنید می توان این گراف را در فضا به صورت جسمی دوازده وجهی مجسم کرد.

- دور 5 راسی دور 5 راسی که 5 راس می باشد که متوالیاً به هم متصل شده اند. گراف یکریختی به صورت زیر دارد.



دو گراف یکریخت جالب !

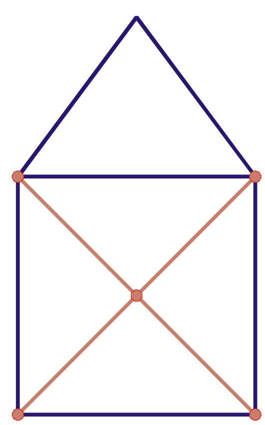


جالب است نه! اصلاً به نظر نمی آید که این دو یکریخت باشند ولیکن اینگونه است. درباره یکریختی این دو بعداً بحث خواهد شد.

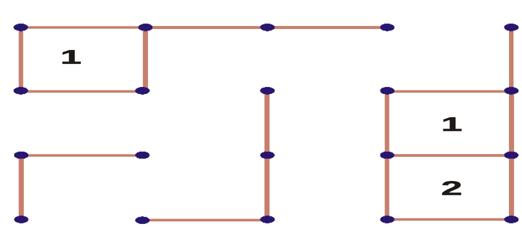
گراف یکی از زیباترین مباحث ریاضیات گسسته و حتی به نظر من کل ریاضیات می باشد!

بزرگترین خصوصیت آن شهودی و ملموس بودنش می باشد به گونه ای که کمتر مطلبی در آن یافت می شود که نشود فهمیدش !

حتماً تا حالا بازی های زیادی روی کاغذ انجام داده اید مانند مسابقه برای کشیدن پاکت نامه ای به صورت زیر به شرطی که قلم را از روی کاغذ بر نداریم و از یک جا شروع و به همانجا برگردیم.



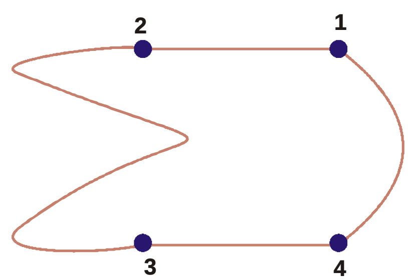
و یا نقطه بازی به این صورت که جدولی از نقاط داریم و هر نفر در نوبت خود دو نقطه مجاور را به هم وصل می کند و ...

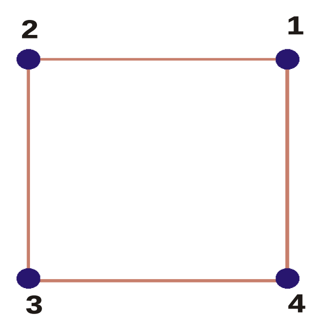


اینها همه به شکلی به نظریه گراف مربوط می گردند.

و یا مسائل پر کاربرد دیگری مانند خیابانهای یک شهر و میادین و تقاطع ها به عنوان نقــاط برخــورد آنها و این مسئله که ترافیک چگونه کنترل گردد یا کدام خیابانها یک طرفه و کدام ها دو طرفه بــشوند نیــز جزئی از همین مقوله می باشند.

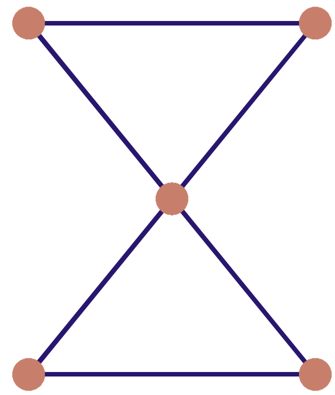
به طور کلی تر گراف مجموعه ای است از نقاط یا گروه ها که ما به آنها راس خــواهیم گفــت و تعــداد خطوط متصل کننده این رئوس یا همان خیابانهای شهر که ما به آنها یال خواهیم گفت از آنجا کــه در گــراف فقط مجموعه رئوس و یالهاست که گراف را تعریف می کند آنگاه گراف هایی مانند



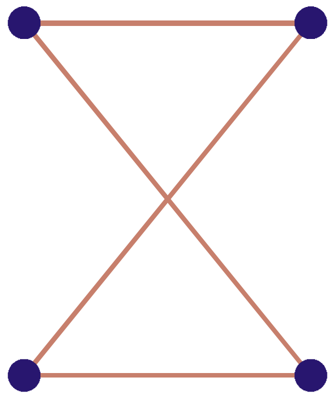


یکسان خواهند بود که ما به آنها یکریخت می گوییم.

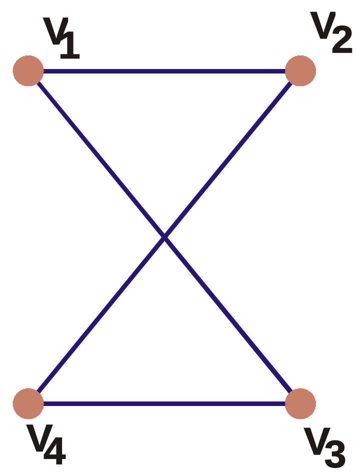
از این به بعد در محل تقاطع یالهایی که در آن تقاطع راسی وجود دارد نقطه تو پر می گذاریم و گرنــه آن تقاطع بیانگر وجود راس نخواهد بود مانند دو گراف زیر که به همین دلیــل اولــی 5 راس و دومــی 4 راس دارد.



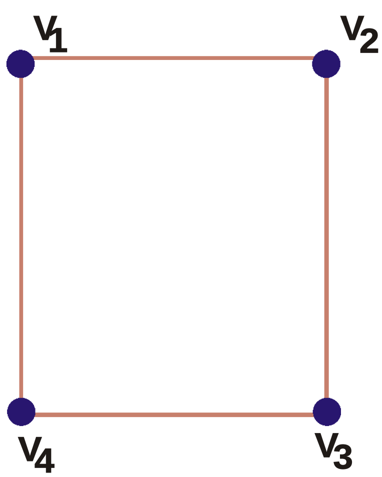
و



ضمناً حتی گراف های



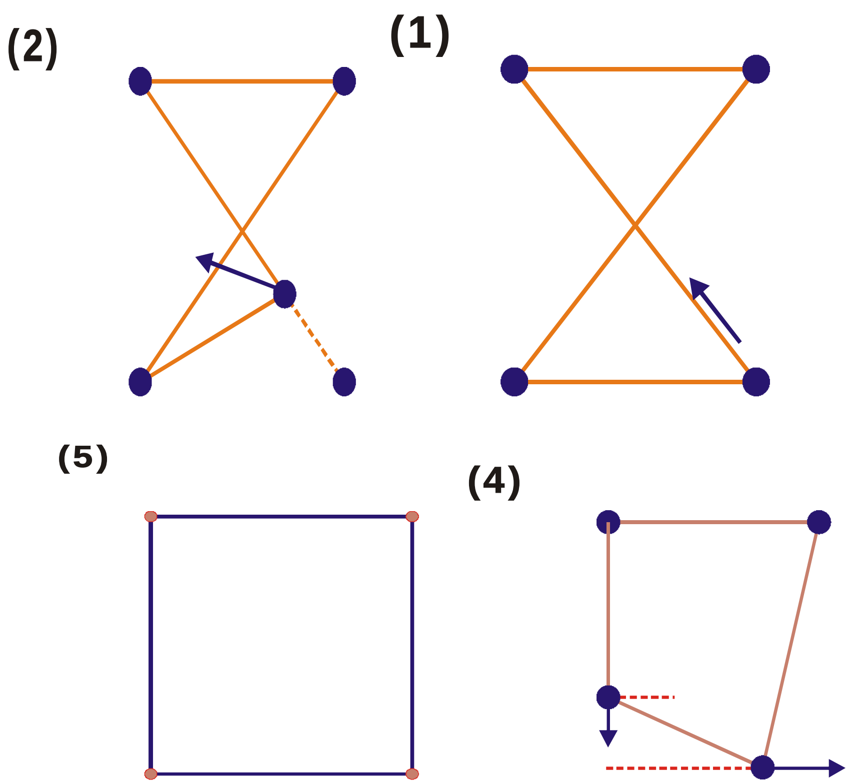
و



نیز یکسان یا یکریخت می باشند زیرا با تبدیلی از رئوس اولی به دومی می توان آنها را به هم تبدیل کرد بدین صورت که در اولی فقط اندیس V_4,V_3 باید تعویض گردند. (به تعریف دقیقتر یکریختی خــواهیم پرداخت)

اما اگر از لحاظ شهودی هم بخواهیم به این موضوع بپردازیم گرافهای یکریخت گرافهایی اند که بدون قطع کردن اتصال یالها و یا افزودن یالهای جدید تنها با جابجایی رئوس و یالهای مربوط بـه آن هـا در فـضا، بتوان آنها را به هم تبدیل کرد.

مانند مثال قبل که به این صورت به هم تبدیل می گردند. (فلش ها به معنی راستای جابجایی آن راس می باشد)



به انیمیشنی که دو گراف یکسان را با حرکت رئوس در صفحه به یکدیگر تبدیل می کند دقت کنید:

[[لینک به انیمیشن شماره 6]]

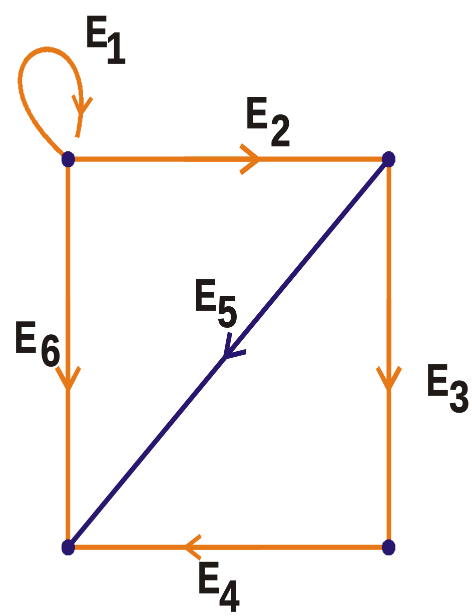
در این میان یالها یا همان ارتباط دهنده های میان رئوس به چند صورت می توانند باشند:

یا جهت دار باشند مانند خیابانهای یکطرفه که اتصال رئوس را تنها در یک جهت معــین برقــرار مــی کنند که درشکل متناظر گراف هم با یک فلش مشخص می گردند.

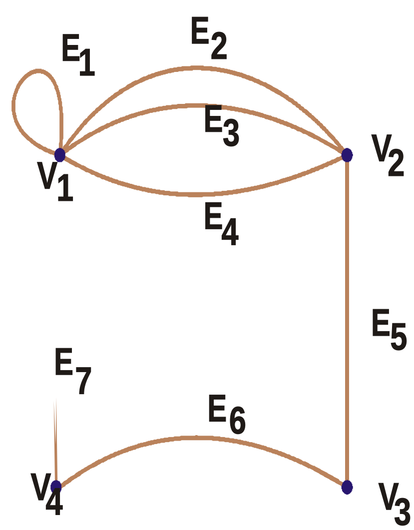
یا یالهایی باشند که یک راس را به خودش متصل می کنند که به آن حلقه خواهیم گفـت. یـا یالهـای چندگانه باشند یعنی بین دو راس خاص بیش از یک یال باشد.

و یا آنکه یال ساده باشند یعنی هیچ کدام از موارد فوق نباشد.

مثال.



گراف جهت دار با یالهـای جهـت دار که در میان یالهای جهـت دار آن یال E_1 حلقه نیز می‌باشد.



حلقه: E_1 , E_7

چند گانه: E_4 , E_3 , E_2

ساده : E_6 , E_5