تست: باقیمانده تقسیم عدد 3^{89} بر عدد 7 چه عددی است؟ (سراسری ۸۸)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

حل: گزینه ۴ صحیح است.

بر طبق قضیه فرما $3^{7-1}\overset{7}{\equiv}1$ در نتیجه

$$\left(3^6\right)^{15}\overset{7}{\equiv}1 \Rightarrow 3^{90}\overset{7}{\equiv}1\overset{7}{\equiv}-6 \Rightarrow 3^{89}\overset{7}{\equiv}-2\overset{7}{\equiv}5$$

تست: اگر ساعت 4 بعدازظهر روز چهارشنبه باشند بعد از گذشت 47^{74} ساعت، چه روز و چه ساعتی خواهد بـود؟ (سراسری ۸۹)

۱)یکشنبه ساعت 3 بعدازظهر ۲) شنبه ساعت 5 بعدازظهر

۳) شنبه ساعت 3 بعدازظهر ۴) یکشنبه ساعت 5 بعدازظهر

حل: برای به دست آوردن جواب، ابتدا باید باقیمانده 47^{74} را بر $168=24\times 7$ یعنی تعداد ساعات در یک هفته را به دست می‌آوریم.

$$47^{74}=47^{64+8+2}=47^{64}\times 47^{8}\times 47^{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}
47^2=2209\overset{168}{\equiv}25\\
\left(47^2\right)^2\overset{168}{\equiv}(25)^2\overset{168}{\equiv}121\\
\left(47^4\right)^2\overset{168}{\equiv}(121)^2\overset{168}{\equiv}25\\
\left(47^8\right)^2\overset{168}{\equiv}(25)^2\equiv 121\\
\left(47^{16}\right)^2\overset{168}{\equiv}(121)^2\overset{168}{\equiv}25\\
\left(47^{32}\right)^2\overset{168}{\equiv}(25)^2\overset{168}{\equiv}121
\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}47^{74}=47^{64}\times 47^{8}\times 47^{2}\\ \overset{168}{\equiv}121\times 25\times 25\overset{168}{\equiv}25\end{array}$$

بنابراین 47^{74} معادل چند هفته به علاوه 25 ساعت است که یعنی یک روز و یک ساعت بعد از چهارشنبه ساعت 4 بعدازظهر یعنی پنج‌شنبه ساعت 5 بعدازظهر که در گزینه‌ها وجود ندارد.

***** این سئوال در آزمون سراسری ۸۹ حذف گردید.**

یادداشت:

....

....

....

....

روابط بازگشتی

در این قسمت ابتدا به چند مسئله کلاسیک که جواب آن‌ها به سادگی با استفاده از روابط بازگشتی به دست می‌آید می‌پردازیم.

ـ برج هانوی: این مسئله به این صورت مطرح می‌شود که ما یک تخته به همراه سه میله عمودی و n دیسک با قطرهای متمایز داریم که دیسک‌ها به ترتیب طول قطرشان روی یک میله قرار دارند. می‌خواهیم حداقل تعداد حرکات برای انتقال این دیسک‌ها را از یک میله به میله دیگر، به شرط آن که روی هیچ میله‌ای دیسکی روی دیسک دیگر با قطر کمتر قرار نگیرد را محاسبه کنیم.

رابطه بازگشتی آن برابر با: $h_n = 2h_{n-1} + 1$

برای محاسبه تعداد حرکات در کل هم کافی است از فرمول $h_k = 2^k - 1$ استفاده کنیم.

ـ هانوی مضاعف: یک برج هانوی با 2n دیسک در اختیار داریم که دو به دو قطر دیسک‌های آن با هم برابرند (یعنی دو دیسک با قطر r_1 ، دو دیسک با قطر r_2 ...) با در نظر گرفتن محدودیت‌های مسئله قبل، با حداقل چند حرکت می‌توان کلیهٔ دیسک‌ها را از مبداء به میلهٔ مقصد انتقال داد.

$$h_{2n} = 2h_{2n-2} + 2$$

ـ اعداد فیبوناچی : فرض کنید در ابتدای یک ماه یک جفت خرگوش نوزاد داریم، هر جفت خرگوش نوزاد می‌توانند سپس از دو ماه بالغ شوند و هر ماه یک جفت خرگوش (یک نر و یک ماده) تولید کنند. اگر در ابتدای ماه اول یک جفت خرگوش داشته باشیم در ابتدای ماه n ام چند جفت خرگوش خواهیم داشت؟

رابطه بازگشتی این مسئله به صورت زیر است:

$$f_n = \text{تعداد جفت خرگوشها در ابتدای ماه n ام} = \left(\underbrace{f_{n-1} - f_{n-2}}_{\text{بچه خرگوشهای یک ماهه}}\right) + \underbrace{f_{n-2}}_{\text{خرگوشهای بالغ}} + \underbrace{f_{n-2}}_{\text{خرگوشهای نوزاد}} = f_{n-1} + f_{n-2}$$

توضیح: در ابتدای ماه چهارم یک جفت خرگوش اولیه یک جفت تولید می‌کند ولی بچه‌های آن‌ها ماه بعدی یعنی در ابتدای ماه پنجم تولید مثل خواهند کرد. بنابراین اگر در ماه $n-1$ به تعداد f_{n-1} خرگوش و در ماه $n-2$ به تعداد f_{n-2} جفت خرگوش داشته باشیم در ماه n ام به تعداد $f_{n-1}+f_{n-2}$ خرگوش خواهیم داشت، زیرا در ابتدای ماه $(n-1)$ ام از f_{n-1} جفت خرگوش موجود $f_{n-1}-f_{n-2}$ خرگوش نوزاد و بقیه خرگوش‌هایی هستند که در ماه n ام تولید مثل خواهند کرد.

سری فیبوناچی: $1,1,2,3,5,8,13,...$

یادداشت:

....

....

....

....

رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی به صورت زیر است.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3$$
$$f(1) = 1 \quad f(2) = 1$$

– مسئله دومینو (کاشی)

فرض کنید یک مستطیل $2\times n$ داریم که $n \in \mathbb{Z}$ است. می‌خواهیم این مستطیل را با مقواهایی مستطیل شکل به ابعاد 2×1 ، به نام دومینو (کاشی) بپوشانیم. به چند طریق مستطیل $2\times n$ با دومینوها کاملاً پوشانده می‌شوند (دومینوها (کاشی‌ها) نباید روی هم قرار گیرند).

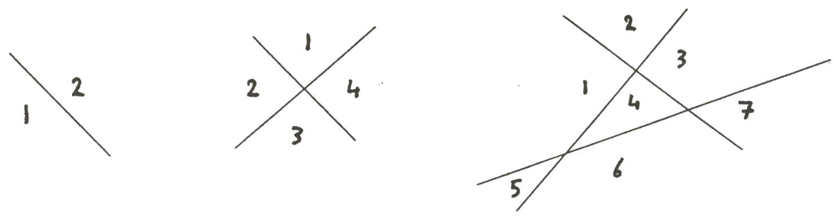
$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \quad n \geq 3$$

و با توجه به این که رابطه بازگشتی $\{f_n\},\{d_n\}$ یکسان هستند (f_n رابطه بازگشتی سری فیبوناچی) پس داریم:

$$d_n = f_{n+1}$$

– مسئله (خطوط در صفحه)

می‌خواهیم حداکثر نواحی ایجاد شده با رسم n خط راست را در صفحه به دست آوریم رابطه بازگشتی I_n به این صورت نوشته می‌شود.



رابطه بازگشتی $l_n = l_{n-1} + n \quad n \geq 2$

برای محاسبه تعداد نواحی ایجاد شده توسط n خط راست می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده نمود.

$$\ln = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

– مسئله زاویه‌ها

اگر n زاویه در صفحه رسم شده باشند و Z_n تعداد ناحیه‌های ایجاد شده توسط این n زاویه باشد در این صورت:

$$Z_n = l_{2n} - 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n = 2n^2 - n + 1$$

یادداشت:

....

....

....

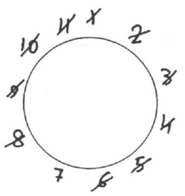
....

– مسئله ژوزف

در زمان جنگ یهودیان و کاتولیک‌های رومی ژوزف به همراه 41 نفر یهودی توسط رومی‌ها در غاری به تله افتاده بودند. آن‌ها به جای اسیر شدن توسط رومی‌ها ترجیح دادند خودکشی کنند برای انجام این کار آن‌ها دایره‌ای تشکیل دادند و قرار شد به یک نفر خنجری بدهند و هر نفر، بغل دستی خود را بکشد و خنجر رابه نفر بعدی بدهد و همین کار را تا انتها انجام بدهند. ژوزف که نمی‌خواست کشته شود به سرعت به محاسبۀ مکانی پرداخت که کشته نشود و جان سالم بدر ببرد.

رابطه بازگشتی مسئله ژوزف به صورت زیر است:

$$\begin{cases} J(1)=1 & \\ J(2n)=2J(n)-1 & n\geq 1 \\ J(2n+1)=2J(n)+1 & n\geq 1 \end{cases}$$

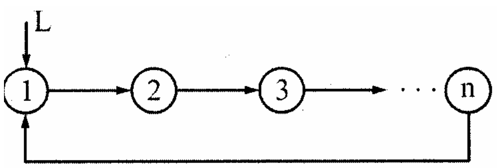


✓ نکته: برای محاسبه ساده تر رابطۀ بازگشتی ژوزف می‌توان از فرمول زیر استفاده نمود.

$$J(n)=2\left(n-2^{\lfloor \lg n \rfloor}\right)+1$$

تست: با توجه به تابع روبرو لیست حلقوی مذکور به ازای مقادیر n برابر 729 و 2200 مقدار خروجی به ترتیب برابر چند خواهد بود؟ (مهندسی کامپیوتر– سراسری ۱۳۸۹)

```
int SO(LIST*L){
While(L→next !=L){
L → next=L → next → next
L=L  →  next;
 }
return L → data;
 }
```



۱) 40,1
۲) 1,1
۳) 2200,729
۴) هیچ کدام

یادداشت:

....
....
....
....

گزینه ۴ صحیح است.

$J(729)=2(729-512)+1=435$

$J(2200)=2(2200-2048)+1=305$

❖ لازم به ذکر می‌باشد که مرتبه زمانی رابطه بازگشتی ژوزف از مرتبه $O(n\lg n)$ می‌باشد.

– مسئله پله (نردبان)

شخصی می‌خواهد از n پلکان بالا رود. این شخص پله‌ها را یکی یکی یا دو تا یکی می‌تواند بالا رود. این فرد به چند طریق می‌تواند مسیر را طی کند.

رابطه بازگشتی: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

$a_1=1 \quad a_2=2$

تست: تمام اعداد n رقمی را در نظر بگیرید که هر کدام از رقم‌های آن‌ها از مجموعه $\{1,2,3,4\}$ انتخاب شده‌اند به طوری که رقم 3 سمت راست رقم 4 قرار نمی‌گیرد. اگر a_n تعداد اعداد n رقمی با این خاصیت باشد. کدام گزینه به ازای $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ صحیح است:

۱) $a_n=4a_{n-1}-1$

۲) $a_n=4a_{n-1}-6^{n-2}$

۳) $a_n=3a_{n-1}+3^{n-1}$

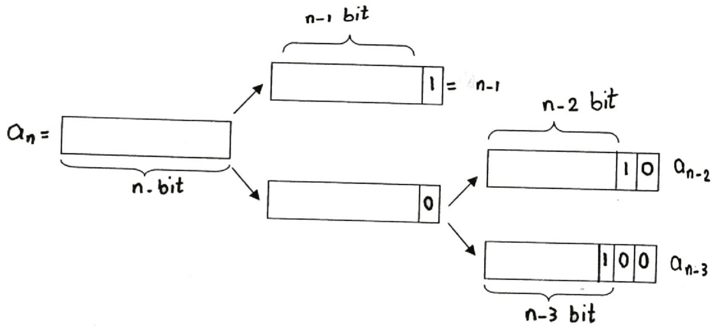
۴) $a_n=2a_{n-1}+6a_{n-2}$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

می‌خواهیم تعداد اعداد $(n+1)$ رقمی با خاصیت مورد نظر را به دست آوریم اگر رقم سمت چپ 2,1 یا 3 باشد، n رقم بعدی هر عدد n رقمی با خاصیت مطلوب مسئله می‌تواند باشد. اگر رقم سمت چپ ۴ باشد، n رقم دیگر نباید 3 باشند. ولی هر کدام می‌توانند 1 ، 2 یا 4 باشند. بنابراین 3^n حالت دارد و در نتیجه $a_{n+1}=3a_n+3^n$ و یا به طور کلی $a_n=3a_{n-1}+3^{n-1}$.

مثال: رابطه بازگشتی تعداد رشته‌های 8 بیتی که 3 صفر متوالی ندارند .

حل:



$\Rightarrow a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$

یادداشت:

....

....

....

....

حل روابط بازگشتی

ـ حل روابط بازگشتی از طریق جایگذاری‌های متوالی

منظور از حل یک رابطه بازگشتی به دست آوردن فرمولی برابر جملهٔ عمومی آن است که a_n (جمله عمومی) فقط بر حسب n بیان شود.

ساده‌ترین روش حل برای روابط بازگشتی، روش جایگذاری‌های متوالی است که همیشه قابل استفاده نیست.

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad , \quad a_1 = 1$ را حل کنید.

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2\left(2a_{n-2} + 1\right) + 1$$
$$= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1$$
$$= 2^2\left(2a_{n-3} + 1\right) + 2 + 1$$
$$= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$
$$= \cdots = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

ـ روابط بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی به صورت (۱) $\quad C_0 x_n + C_1 x_{n-1} + \cdots + C_m x_{n-m} = 0$ را رابطه بازگشتی همگن با ضرایب ثابت گوییم. خطی است چون درجه کلیه x_nها یک است و همگن است چون $f(n) = 0$ است. برای حل این دسته از روابط بازگشتی کافی است $x_n = r^n$ را جایگزین در این رابطه کنیم و آن را تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m کنیم. به این چند جمله‌ای، معادله مشخصه گویند و به فرم زیر است:

$$C_0 r^n + C_1 r^{n-1} + \cdots + C_m r^{n-m} = 0$$

با ضرب طرفین معادله بالا در $\frac{1}{r^{n-m}}$ به معادله (۲) $\quad C_0 r^m + C_1 r^{m-1} + \cdots + C_m = 0$ می‌رسیم.

حال فرض کنید $r_1, r_2, \cdots, r_m$ ریشه‌های معادله مشخصه رابطه (۲) باشد. در این صورت می‌توان سه پیشامد را متصور شد:

۱) m ریشهٔ متمایز وجود داشته باشد که در این صورت مسئله به فرم (۳) $\quad x_n = K_0 r_1^n + K_1 r_2^n + \cdots + K_m r_m^n$ می‌شود که در آن ضرایب $K_0, K_1, \cdots, K_m$ به وسیله مقادیر اولیه مشخص می‌شود.

یادداشت:

....

....

....

....

۲) دارای ریشه‌های تکراری باشد که در این صورت با توان‌هایی از ضریب n در پشت جواب عمومی همراه می‌شود فرض کنید $r_1 = r_2 = r_3$ در این صورت جواب به فرم:

$$x_n = K_1 r_1^n + K_2 n r_2^n + K_3 n^2 r_3^n \qquad (۴)$$

۳) معادله مشخصه ریشه صحیح نداشته باشد در این صورت مانند حالت (۱) ریشه‌های مختلط را محاسبه می‌کنیم سپس آن را به فرم معادلهٔ (۳) می‌نویسیم.

تذکر: در این حالت باید فرم‌های مختلف نمایش اعداد مختلط را از قبیل فرم قطبی، فرمول اویلر و ... را بدانید.

✓ نکته : دنباله فیبوناچی از نوع بازگشتی خطی همگن با ضریب ثابت است پس می‌توان فرم بستهٔ آن را به صورت زیر به دست آورد.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n > 1$$
$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$

ابتدا معادله مشخصه این رابطه را به دست می‌آوریم:

$$r^2 - r - 1 = 0$$
$$r_1, r_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

حال با استفاده از رابطه (۱) جواب عمومی رابطه بازگشتی را تعیین می‌کنیم و در آخر با استفاده از مقادیر f_1, f_0 مقدار صحیح ضرایب را به دست می‌آوریم.

$$f_n = K_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$f_0 = 0 \;\Rightarrow\; K_1 + K_2 = 0$$
$$f_1 = 1 \;\Rightarrow\; K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \;\Rightarrow\; K_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \;,\; K_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

پس جواب نهایی به صورت زیر است:

$$f_n = \frac{\left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

یادداشت:

....

....

....

....

ـ روابط بازگشتی خطی ناهمگن با ضرایب ثابت

رابطه بازگشتی به فرم معادله (۵) $C_0x_n + C_1x_{n-1} + \cdots + C_mx_{n-m} = g(n)$ که در آن $g(n) \neq 0$ باشد را یک رابطه ناهمگن گویند. سپس می‌توان گفت رابطه همگن نوع خاصی از رابطه ناهمگن است. این روابط برخلاف روابط بازگشتی همگن برای حلشان روش عامی وجود ندارد اما برای فرم‌های مشخصی از روابط روش‌هایی ارائه شده که ما در این قسمت با چند روش از آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱)اگر U_n جواب عمومی فرم همگن شده با فرض $g(n) = 0$ در معادله (۵) باشد و $V(n)$ نیز جواب خصوصی معادله ناهمگن این معادله باشد در این صورت جواب رابطه بازگشتی ناهمگن (۵) به صورت $x_n = V_n + U_n$ خواهد بود.

تذکر: ما برای استفاده از این روش، نیاز به پیدا کردن جواب خصوصی معادله ناهمگن داریم که ممکن است کار آسانی نباشد اما یک روش کلی برای فرم‌های استاندارد نسبتاً ساده $g(n)$ وجود دارد که به صورت زیر است:

- چند جمله‌ای: مانند $g(n) = 5n^2 - 2n + 1$
- نمایی : مانند $g(n) = 3^n$
- چند جمله‌ای X نمایی : مانند $g(n) = 2^n\left(5n^2 + 3n + 1\right)$

۲) رابطه بازگشتی ناهمگن روبرو را (۶) $t_n = At_{n-1} + Bt_{n-2} + g(n)$ که در آن $g(n) = S^n$ (چند جمله‌ای از درجه N) است در نظر بگیرید. در این صورت اگر S ریشه معادله مشخصه رابطه (۶) یعنی $r^2 - Ar - B = 0$ نباشد آنگاه یک جواب خصوصی به فرم :

$$V_n = S^n\left(C_0 + C_1n + C_2n^2 + \cdots + C_Nn^N\right)$$

خواهد داشت.

اما در صورتی که S ریشه m ام معادله مشخصه (۶) باشد آنگاه جواب خصوصی رابطه بازگشتی (۶) به فرم زیر خواهد بود.

$$V_n = S^nn^m\left(C_0 + C_1n + C_2n^2 + \cdots + C_Nn^N\right)$$

❖ دقت کنید که در صورتی‌که $g(n)$ چند جمله‌ای ساده‌ای مانند $g(n) = 5n^2 - 2n + 1$ باشد آنگاه $S = 1$ در روش (۲) محسوب خواهد شد.

یادداشت:

....

....

....

....

مثال: رابطه بازگشتی روبرو را در نظر بگیرید.

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + g(n)$

معادله مشخصه آن برابر با $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$ خواهد بود.

۱ـ اگر $g(n) = 3^n$ باشد آنگاه $V_n = 3^n An^2$ خواهد بود.

۲ـ اگر $g(n) = 3^n (5n+1)$ باشد آنگاه $V_n = 3^n n^2 (An+B)$ خواهد بود.

۳ـ اگر $g(n) = 2^n (2n^2+4)$ باشد آنگاه $V_n = 2^n (An^2+Bn+C)$ خواهد بود.

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + g(n)$ را در نظر بگیرید.

معادله مشخصه : $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$

حال اگر $g(n) = 3n+1$ باشد در این صورت جواب خصوصی رابطه بازگشتی به فرم $V_n = n(An+B)$ خواهد بود زیرا در اینجا $S=1$ می‌باشد و S یک ریشه معادله مشخصه است بنابراین n باید در V_n وجود داشته باشد.

ـ روابط بازگشتی خطی ناهمگن با ضرایب متغیر

در صورتی که در معادله $C_0x_n + C_1x_{n-1} + C_2x_{n-2} + \cdots + C_mx_{n-m} = g(n)$ به جای ضرایب $0 \le i \le m$ و در C_i توابعی از n وجود داشته رابطه بازگشتی حاصله را خطی ناهمگن با ضرایب متغیر می‌نامیم برای این گونه روابط بازگشتی روش حل عمومی شناخته شده وجود ندارد اما برای گونه‌های خاصی از آن‌ها روش‌هایی ارائه شده است که بعضاً روش‌های پیچیده‌ای هستند. در این قسمت فقط به یک روش نسبتاً ساده به نام «مجموع ضرایب» می‌پردازیم و تنها روش استفاده از آن را شرح می‌دهیم.

ـ در صورتی که رابطه بازگشتی به فرم مرتبه اول یعنی (۷) $f(n)x_n = g(n)x_{n-1} + h(m)$ باشد در این صورت می‌توان با روش مجموع ضرایب، این معادله بازگشتی را حل نمود.

دو طرف رابطه (۷) را در عبارت (۸) $S(n) = \dfrac{f(n-1)f(n-2)\ldots f(1)}{g(n)g(n-1)\ldots g(2)}$ ضرب می‌کنیم. بنابراین رابطه بازگشتی (۷) به فرم روبرو تغییر شکل می‌دهد. (۹) $Y_n = Y_{n-1} + S(n)h(n)$

که در آن $Y_n = g(n+1)S(n+1)x_n$ می‌باشد رابطه (۹) به ما این قابلیت را می‌دهد که x_n را به فرم روبرو بیان کنیم.

$$x_n = \frac{1}{S(n)f(n)}\left(S(1)g(1)x_0 + \sum_{K=1}^{n} S(k)h(k)\right) \quad (۱۰)$$

که این رابطه جواب رابطه بازگشتی (۷) می‌باشد. بنابراین برای حل این گونه روابط کافی است مجموع ضرایب $S(n)$ رابطه را به دست آوریم و آن را در معادله (۱۰) قرار دهیم تا جواب رابطه به فرم بسته به دست آید.

یادداشت:

....

....

....

....

تست: تابع پیچیدگی یک الگوریتم به صورت زیر مشخص شده است:

$$T(n)=T(n-1)+\frac{5}{n} \qquad n>1$$
$$T(1)=0$$

در حالتی که مقدار n مقدار کوچکی نباشد پیچیدگی زمانی این الگوریتم برابر است با :

۱) $O\left(\frac{\ln n}{5}\right)$ ۲) $O(\ln n)$ ۳) $O\left(n^2\right)$ ۴) $O(5\lg n)$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

رابطه بازگشتی فوق را می‌توان با ضرب n در دو طرف رابطه بازگشتی به فرم زیر نوشت:

$$nT(n)=nT(n-1)+5 \qquad n>1$$

که در آن $f(n)=n$, $g(n)=n$, $h(n)=5$ حال مجموع ضرایب را با استفاده از معادله

$$S(n)=\frac{f(n-1)f(n-2)\cdots f(1)}{g(n)g(n-1)\cdots g(2)}$$

می‌توان حساب کرد و آن را در معادله: $x_n=\frac{1}{S(n)f(n)}\left(S(1)g(1)x_0+\sum_{k=1}^{n}S(k)h(k)\right)$ قرار می‌دهیم تا جواب رابطه بازگشتی به دست آید.

$$S(n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{n(n-1)(n-2)\cdots 2}=\frac{1}{n} \Rightarrow T(n)=5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=5H_n$$

در نهایت با استفاده از فرمول

$$H_n \approx \ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

که در آن $\gamma \approx 0.58$ است جواب رابطه بازگشتی برابر با $O(\ln n)$ می‌شود پس گزینه صحیح ۲ می‌باشد.

تست: یک رمز یک رشته دهدهی است که : (مهندسی کامپیوتر ــ سراسر ۸۶)

شامل 0 نباشد

شامل 11 , 12 , 21 , 22 نباشد.

اگر a_n تعداد رمزهای به طول n باشد، کدام رابطه درست است؟ (توضیح که رشته دهدهی رشته‌ای است که در آن فقط از ارقام 0 تا 9 استفاده شده باشد).

۱) $a_n=7a_{n-1}+8a_{n-2}$ ۲) $a_n=77a_{n-2}+8a_{n-3}$

۳) $a_n=7a_{n-1}+7a_{n-2}$ ۴) $a_n=7a_{n-1}+14a_{n-2}$

یادداشت:

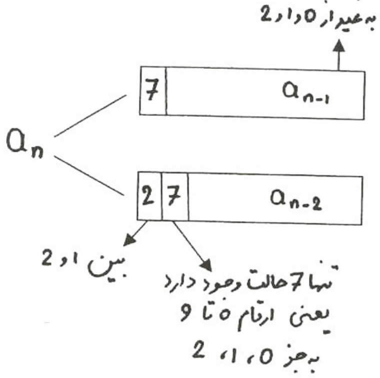
....

....

....

....

حل: گزینه ۴ صحیح است.



تست : فرض کنیم $P(n,k)$ تعداد افرازهای n به دقیقاً k جمعوند (صحیح مثبت) باشد (جمعوند به هر یک از اعدادی که حاصل جمع آن‌ها برابر n شود گویند.) کدام رابطه بازگشتی در مورد $P(n,k)$ صحیح است؟ $\left(n,k\in\mathbb{Z}^+\right)$ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $P(n,k)=P(n-k,k)+P(n-1,k)$

۲) $P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k)$

۳) $P(n,k)=P(n-k,k-1)+P(n-1,k-1)$

۴) $P(n,k)=P(n-k,k-1)+P(n-1,k)$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

توضیح: تعداد روش‌هایی که می‌توان n عدد صحیح و مثبت n را به صورت مجموع $1\le k\le n$ عدد صحیح و مثبت نوشت برابر است با $\binom{n-1}{n-k}$ در نتیجه $p(n,k)=\binom{n-1}{n-k}$ با یک جایگذاری ساده در گزینه می‌توان دریافت پاسخ گزینه ۲ است.

یادداشت:

....

....

....

....

تابع مولد

یک تابع مولد برای $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ عبارتست از سری توانی $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

یاد آوری :

در صورتی $|x|<1$ باشد آنگاه :

۱) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$

۲) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$

۳) $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots$

۴) $\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^k$

۵) $\frac{1}{(1-x)^3}=1+\frac{3\times 2}{2}x+\frac{4\times 3}{2}x^2+\ldots$

۶) $\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m-1+n}{m-1}x^n$

۷) $\frac{1}{1-Cx}=1+Cx+C^2x^2+C^3x^3+\ldots$

- ✓ **نکته** : در صورتی که $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند که بـه ترتیـب بـا تـابع مولـدهای $G_a(s)$ و $G_b(s)$ متناظر باشند در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که به ازای هر $n\geq 0$, $a_n=b_n$ شود آن اسـت کـه بـه ازای هر S، $G_a(s)=G_b(s)$
- ✓ **نکته** : اگر $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی به ترتیب با توابع مولد $G_a(x)$, $G_b(x)$ باشند در این صورت:

۱ـ به ازای هر عدد حقیقی با تابع $cG_a(x)$ تابع مولد دنباله $\{ca_n\}_{n=0}^{\infty}$ است.

۲ـ تابع مولد $c_n=a_n+b_n$ برابر $G_a(x)+G_b(x)$ است.

۳ـ $a_n=\frac{1}{n!}G^{(n)}(0)$

۴ـ تابع مولد دنباله $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ عبارتست از $G_a(S).G_b(S)$.

یادداشت:

....

....

....

....

مثال: تابع مولد دنباله $C_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ **را بیابید.**

حل: با فرض $a_n = \frac{1}{n!}$, $b_n = 1$ کافی است تابع مولد این دو را در هم ضرب کنیم.

بنابراین داریم:

$$G_a(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = e^x$$

$$G_b(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$G(x) = e^x . \frac{1}{1-x} = \frac{e^x}{1-x}$$

✓ **نکته** : در صورتی که تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ برابر $G(x)$ باشد در این صورت:

۱ـ $G'(x)$ تابع مولد $\{(n+1)a_{n+1}\}$ است.

۲ـ $x\,G'(x)$ تابع مولد دنباله $\{n\,a_n\}$ است.

۳ـ $\int_0^x G(t)dt$ تابع مولد دنباله $C_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{a_n - 1}{n} & n \geq 1 \end{cases}$ است.

✓ **نکته** : اگر $g(x)$ تابع مولد دنباله $\{a_r\}$ باشد $(1-x)g(x)$ تابع مولد دنباله $a_r - a_{r-1}$ است و $\frac{g(x)}{1-x}$ تابع مولد دنباله $b_r = \sum_{i=0}^{r} a_i$ است.

مثال: تابع مولد برای $a_r = 2r + r^2$ **را بیابید.**

حل: $g(x) = \frac{1}{1-x}$ تابع مولد دنباله $\{1\}$ است. بنابراین $f(x) = xg'(x)$ تابع مولد $\{r\}$ است در نتیجه $xf'(x)$ هم تابع مولد دنباله r^2 است بنابراین برای به دست آوردن تابع مولد دنباله a_r کافی است $2xg'(x) + x(xg'(x))'$ را محاسبه کنیم که عبارتست از:

$$\frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$$

یادداشت:

....

....

....

....

تست: اگر $G(x)$ یک تابع مولد برای دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ باشد آنگاه یک تابع مولد برای دنباله $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ چیست؟

۱) $G(x)$ ۲) $G(nx)$ ۳) $xG'(x)$ ۴) $G(x^n)$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$\{na_n\}_{n=0}^{\infty}=0\times a_0+1\times a_1x+2a_2x^2+\dots$$

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

$$G'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots$$

اگر G' را در یک x ضرب کنیم دنباله مورد نظر به دست خواهد آمد.

$$x\,G'(x)=\{n\,a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

تست : تابع مولد دنباله $a,0,1,a,a^2,a^3,\dots$ که در آن $a\neq 0$ کدام است؟

۱) $\frac{ax}{1+x}$ ۲) $\frac{x}{1+ax}$ ۳) $\frac{ax^2}{1-x}$ ۴) $\frac{x^2}{1-ax}$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

گزینه ۱ و ۲ نمی‌تواند باشد زیرا جملات تولید شده از طریق آن‌ها یک در میان مثبت و منفی است، گزینه ۳ هم برای کلیه جملات ضریب a دارد در نتیجه گزینه ۴ صحیح است.

$$x^2\left(\frac{1}{1-ax}\right)=x^2\left(1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\dots\right)=0+0\times x+x^2+ax^3+a^2x^4+\dots$$

راه حل دیگر :

$$0+0x+1x^2+ax^3+a^2x^4+a^3x^5+\dots=x^2\left[1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\dots\right]$$

تست: تابع مولد دنباله $a_n=\binom{n+4}{n}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{(1-x)^5}$ ۲) $\frac{1}{(1-x)^n}$ ۳) $(1-x)^n$ ۴) $(1-x)^5$

گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+5-1}{n}x^n$$

یادداشت:

....

....

....

....

ـ کاربرد توابع مولد در حل مسائل ترکیباتی

۱ـ در حالتی که بخواهیم n شی مشابه را بین m نفر یا دسته‌ای خاص (که دو به دو متمایز هستند) تقسیم کنیم با محدودیت‌های در نظر گرفته شده می‌توان از تابع مولد استفاده کرد.

مثال: فرض کنید 12 سیب مشابه را بین سه کودک طوری تقسیم کنیم که به نفر اول حداقل 2 سیب و به نفر دوم حداقل 1 سیب برسد. تعداد حالت‌های ممکن برای اینکه این 12 سیب بین این سه کودک تقسیم شوند چیست؟

$$\Big(\underbrace{x^2+x^3+\dots}_{A}\Big)\Big(\underbrace{x^1+x^2+x^3+\dots}_{B}\Big)\Big(\underbrace{x^0+x^1+x^2+x^3+\dots}_{C}\Big)$$

$x^2x^6x^4=x^{12}$: تعداد حالتی که می‌توان این کار را کرد

یا

$$x^5x^7x^0=x^{12}$$

به عبارتی دیگر ضریب x^{12} را می‌خواهیم .

$$x^2\left(1+x+x^2+\dots\right)x\left(1+x+x^2+\dots\right)\left(1+x+x^2+\dots\right)=\frac{x^3}{(1-x)^3}$$

$$x^3\times\frac{1}{(1-x)^3}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^{n+3} \qquad n+3=12 \Rightarrow n=9$$

با یک جایگذاری ساده جواب به دست می‌آید $\binom{11}{9}$

راه حل دیگر:

$$\underset{+2}{x_1}+\underset{+1}{x_2}+x_3=9 \Rightarrow \binom{9+3-1}{9}=\binom{11}{9}$$

تست: دنباله $a_1,a_2,\dots,a_n$ که $a_i\in\{-2,1,2\}$ ها را k تکه‌ای نامیم، هرگاه $|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|=k$ فرض کنید b_k تعداد دنباله‌های k تکه‌ای متمایز باشند، تعداد b_5 چقدر است؟

۱) 8 ۲) 11 ۳) 16 ۴) 21

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|=5$$

$$\left(x+2x^2\right)+\left(x+2x^2\right)+\dots+\left(x+2x^2\right)$$

یادداشت:

....

....

....

....