$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(x+2x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(1+2x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k x^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$$

$$2\binom{5}{0}+2\binom{4}{1}+2^2\binom{3}{2}=1+8+12=21$$

۲ـ اگر n شی متمایز را بخواهیم بین m فرد یا طبقه متمایز با محدودیت خاص قرار دهیم از تابع مولد $e^x$ استفاده می‌شود:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

که در این صورت ضریب $x^n$ که در $n!$ ضرب می‌شود مورد نظر ماست.

**مثال:** به چند طریق می‌توان 21 مهره غیر همانند را در سر جعبه غیرهمانند توزیع کرد به طوری که در جعبه اول تعداد زوج و در جعبه دوم تعداد فردی از مهره‌ها قرار گیرند؟

$$\left(x^0+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)\left(x^0+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\times\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\times e^x$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)e^x=\frac{1}{4}\left(e^{3x}-e^{-x}\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-(-1)^n}{n!}x^n\right)$$

$$n!\times x^n \text{ ضریب } =\frac{1}{4}\left(\frac{3^n-(-1)^n}{1}\right)$$

✓ **نکته :**

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

## خاصیت رابطه‌ها

**ـ تعاریف :**

۱ـ رابطهٔ R را روی مجموعه A بازتابی می‌گوییم هرگاه به ازاء هر $x \in A$ , $(x,x) \in R$

۲ـ رابطه R را روی مجموعه A متقارن می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in A$ از $(x,y) \in R$ , $(y,x) \in R$ نتیجه شود.

۳ـ مجموعهٔ A مفروض است. رابطه R را روی A متعدی گوییم هرگاه به ازای هر $x,y,z \in A$ از $(x,y),(y,z) \in A$ ، $(x,z) \in R$نتیجه شود.

۴ـ رابطه R بر روی مجموعه A مفروض است، R را پادمتقارن نامیم هرگاه به ازای هر $a,b \in A$ از $bRa , aRb$ بتوان نتیجه گرفت که $a=b$ است. به زبانی دیگر یعنی :

$\forall x,y \in A : xRy \;\; , \;\; yRx \;\; \rightarrow \;\; x=y$

یا

$\forall x,y \in A : xRy \;\; , \;\; x \neq y \;\; \rightarrow \;\; y \cancel{R} x$

۵ـ رابطه R ضد بازتابی است هرگاه $\forall x \in A ; (x,x) \notin \mathbb{R}$

✓ **نکته** : **در حالت کلی بر روی مجموعه $A=\{1,2,...,n\}$ تعداد رابطه‌هایی که می‌توان نوشت به طوری که خواص زیر را دارا باشند به صورت زیر است:**

۱ـ بازتابی باشد : $2^{n^2-n}$

۲ـ متقارن باشد : $2^{\frac{n^2+n}{2}}$

۳ـ پاد متقارن باشد : $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

۴ـ بازتاب و پاد متقارن باشد $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

۵ـ بازتاب و متقارن باشد $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

۶ـ متقارن و پاد متقارن باشد $2^n$

**تست: مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ مفروض است چند رابطه روی A وجود دارد به طوری که خواص پاد متقارن و بازتابی (هر دو) را دارا باشد.**

۱) $3^5$ ۲) $3^6$ ۳) $3^7$ ۴) $3^8$

**یادداشت:**

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

**حل:** گزینه ۲ صحیح است.

$3^{\frac{n^2-n}{2}}$ : پاد تقارنی و بازتابی $\Rightarrow 3^{\frac{16-4}{2}} = 3^6$

$n = 4$

**چند نکته:**

- ✓ رابطه R متقارن است اگر و فقط اگر $R = R^{-1}$
- ✓ رابطه R متعدی است اگر و فقط اگر $R^2 \subseteq R$
- ✓ اگر R بازتاب باشد $\bar{R}$ ضد بازتاب است و بالعکس.
- ✓ اگر R متقارن باشد $\bar{R}$ نیز متقارن است و بالعکس.
- ✓ اگر R هر خاصیتی داشته باشد آنگاه $R^{-1}$ نیز همان خواص را دارد.

**تست: فرض کنید $R_2, R_1$ دو رابطه بازتابی و متقارن روی مجموعه A باشند کدام یک از گزاره‌های زیر درست نیست؟ (سراسری ۸۲)**

۱) $R_1 \subseteq R_1^2$

۲) $R_1 \Delta R_2$ متقارن نیست.

۳) $\bar{R}_1$ متقارن است.

۴) $R_1 \Delta R_2$ بازتابی نیست $R_1 \Delta R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$

**حل:** گزینه ۲ صحیح است.

## نکات بسیار مهم :

- اگر $R_2, R_1$ دو رابطه روی مجموعه A باشند آنگاه:
- ✓ اگر $R_2, R_1$ بازتابی باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ نیز بازتابی هستند.
- ✓ اگر $R_2, R_1$ متقارن باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ نیز متقارن هستند.
- ✓ اگر $R_2, R_1$ پادمتقارن باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ نیز پادمتقارن هستند.
- ✓ اگر $R_2, R_1$ تعدی باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ نیز تعدی هستند.

- در مجموعه A که در آن $|A| = n$ باشد در این صورت:
- ✓ اگر R رابطه ای بازتابی روی A باشد آنگاه $|R| \geq n$
- ✓ اگر $R_2, R_1$ دو رابطه روی A باشند و $R_1 \subseteq R_2$ باشد در این صورت اگر $R_1$ بازتابی (متقارن، پادمتقارن، تعدی) می‌باشد. آنگاه $R_2$ بازتابی (متقارن، پادمتقارن، تعدی) است.
- ✓ اگر R رابطه‌ای هم ارزی روی A باشد آنگاه $n \leq |R| \leq n^2$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

- رابطه $R$ روی مجموعهٔ $A$ را به ترتیب جزئی یا رابطه ترتیبی جزئی گوییم هرگاه $R$ سه خاصیت بازتابی، پادمتقارن، و تعدی را داشته باشد.
- رابطه هم ارزی $R$ روی مجموعهٔ $A$ رابطه‌ای است که سه خاصیت بازتابی، متقارن و تعدی را داشته باشد.
- اگر $A$ یک مجموعه و $I$ مجموعه‌ای اندیسگذار به ازای هر $R_i, i\in I$ رابطه‌ای روی $A$ باشد آنگاه:

$\bigcap_{i\in I} R_i$ روی $A$ بازتابی است اگر و فقط اگر هر $R_i$ روی $A$ بازتابی باشد. اما برای $\bigcup_{i\in I} R_i$ این رابطه صحیح نمی‌باشد.

- اگر $R_2, R_1$ دو رابطه متقارن روی مجموعه $A$ باشند. اگر $R_1 . R_2 \subseteq R_2 . R_1$ باشد آنگاه $R_1 . R_2 = R_2 . R_1$ است.
- به ازای مجموعه‌های $C, B, A$ و روابط $R_1 \subseteq A\times B \;\;,\;\; R_2 \subseteq B\times C$ باشد آنگاه $\left(R_1.R_2\right)^c = R_2^c . R_1^c$ است.
- اگر $R$ رابطه‌ای بازتابی روی مجموعه $A$ باشد آنگاه $(R.R)R^2$ نیز روی $A$ بازتابی است.
- : اگر به ازای مجموعه‌های $A, B, C$ روابط $R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$, $R_3 \subseteq B\times C$ باشد در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که : $R_1 .(R_2 \cup R_3) = (R_1 . R_2)\cup(R_1 . R_3)$
- $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A\cup B}$
- هنگامی $2^A \cup 2^B = 2^{A\cup B}$ است که $B\subseteq A$ باشد یا $A\subseteq B$ .

**تست: کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟**

۱) $2^A \cap 2^B = 2^{A\cap B}$
۲) $2^A \cup 2^B = 2^{A\cup B}$
۳) $2^A \setminus 2^B = 2^{A\setminus B}$
۴) موارد ۳ و ۱

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

- **نکته**: تعداد زیر مجموعه‌های $K$ عضوی یک مجموعه $n$ عضوی برابر است با : $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 \\ \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K} \end{cases}$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

بنابراین

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

**یادداشت:**

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

پس در حالت کلی

$$(1+a)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

**تست: فرض کنید که n یک عدد طبیعی باشد مقدار عبارت** $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n}{i}$

۱) $2^{n+1}$ ۲) $3^n$ ۳) $2^{n+1}+1$ ۴) $4^n-3^n+2$

گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i = 3^n$$

**تست: کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)**

۱)بستار تقارنی (symmetric closure) یک رابطه متعدی، متعدی است.

۲) بستار بازتابی (reflexive closure) یک رابطه متعدی، متعدی است.

۳) بستار تقارنی (symmetric closure) یک رابطه بازتابی،بازتابی است.

۴) بستار تعدی (transitive closure) یک رابطه متقارن، متقارن است.

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

## اصل شمول و عدم شمول

### مقدمه

فرض کنید K ویژگی درباره اشیاء مجموعه S داشته باشیم و $A_i$ زیر مجموعه ای از S باشد که تمام اعضای آن واجد ویژگی i هستند. می‌خواهیم تعداد اشیایی از S را حساب کنیم که حداقل یکی از این K ویژگی را داشته باشند یا تعداد اشیایی را حساب کنیم که هیچ کدام از K ویژگی مذکور را دارا نباشند برای این منظور از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم.

ـ اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای A را با $|A|$ نشان می‌دهیم.

ـ اگر $A_2 , A_1$ دو مجموعه متناهی باشند آنگاه : $|A_1 \cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1 \cap A_2|$

در واقع زمانی که $|A_1|+|A_2|$ را محاسبه می‌کنیم، اعضای مجموعه‌های $A_2 , A_1$ را جداگانه می‌شماریم و جمع می‌کنیم. در نتیجه عضوهایی که در $A_2 , A_1$ در اشتراک هستند دو بار شمرده می‌شوند و هنگام محاسبه $|A_1 \cup A_2|$ باید اثر این شمارش دوباره را حذف کنیم. رابطه بالا اصل شمول و عدم شمول برای دو دومجموعه نامیده می‌شود.

**قضیه :** فرض کنید $P_k ,\dots, P_2 , P_1$ ویژگی‌های مشخص باشند و $A_i$ زیرمجموعه‌ای از S باشد که اعضای آن دارای ویژگی $P_i$ هستند در این صورت تعداد اعضایی از S که هیچ یک از ویژگی‌های $P_1$ تا $P_k$ را ندارند برابر است با :

$$|\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_k|=|S|-\sum_{i=1}^{K}|A_i|+\sum_{i<j}|A_i \cap A_j|-\sum_{i<j<l}|A_i \cap A_j \cap A_l|+\dots+(-1)^K|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_K|$$

✓ **نکته:** تعداد اعضایی از S که حداقل دارای یکی از ویژگی‌های $P_1$ تا $P_K$ هستند برابر است با :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|=\sum_{i=1}^{K}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i \cap A_j|+\sum_{i<j<l}|A_i \cap A_j \cap A_l|-\dots+(-1)^{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_K|$$

**مثال: تعداد اعداد طبیعی بین 1 و 1000 را حساب کنید که بر هیچ یک از اعداد 5 , 6 , 8 بخش‌پذیر نباشند.**

**حل:** $P_1$ را ویژگی بخش پذیر بودن یک عدد طبیعی بر $P_2 , 5$ را بخش‌پذیر بودن یک عدد طبیعی بر 6 و $P_3$ را بخش پذیر بودن یک عدد طبیعی بر 8 در نظر می‌گیریم. $A_i$ را مجموعه اعداد طبیعی بین 1 و 1000 در نظر می‌گیریم که دارای ویژگی $P_i$ هستند واضح است که :

$$|A_1|=\left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor=200$$

$$|A_2|=\left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor=166$$

$$|A_3|=\left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor=125$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

اعداد طبیعی متعلق به $A_1 \cap A_2$ بر 5 , 6 (یعنی بر 30) بخشپذیرند. اعداد متعلق به $A_1 \cap A_3$ بر 40 و اعداد متعلق به $A_2 \cap A_3$ بر 24 بخش پذیر باشند در نتیجه :

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$$

بالاخره اعضای $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ اعدادی از $N_{1000}$ هستند که بر 120 بخشپذیرند. بنابراین:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

در نتیجه طبق اصل شمول ـ عدم شمول، تعداد اعداد بین 1 تا 1000 که به هیچ یک از اعداد 5 , 6 , 8 بخشپذیر نیستند برابر است با :

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

**تست: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, ..., 600\}$ حاوی تمامی اعداد طبیعی بین یک تا 600 باشد، تعداد اعضای A که بـر 3 یا 5 یا 7 بخش‌پذیر نیستند چند تاست؟** (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۱۳۸۹)

۱) 275 ۲) 270 ۳) 280 ۴) 405

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

$$|N_A| = 600$$

$$|N_3| = \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor = 200$$

$$|N_5| = \left\lfloor \frac{600}{5} \right\rfloor = 120$$

$$|N_7| = \left\lfloor \frac{600}{7} \right\rfloor = 85$$

$$|N_{3 \wedge 5}| = |N_{15}| = \left\lfloor \frac{600}{15} \right\rfloor = 40$$

$$|N_{3 \wedge 7}| = |N_{21}| = \left\lfloor \frac{600}{21} \right\rfloor = 28$$

$$|N_{5 \wedge 7}| = |N_{35}| = \left\lfloor \frac{600}{35} \right\rfloor = 17$$

$$|N_{3 \wedge 5 \wedge 7}| = |N_{105}| = \left\lfloor \frac{600}{105} \right\rfloor = 5$$

$$|N_{\neg(3 \vee 5 \vee 7)}| = 600 - (200 + 120 + 85) + (40 + 28 + 17) - 5 = 275$$

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

## توابع

**تعریف :** می‌گوییم $f:A\to B$ یک تابع است هرگاه :

۱- $P\subseteq A\times B$

۲- $\forall(x,y)\in f\ ,\ (x,y)\in f\ \Rightarrow\ y=y_1$

**تست: مقدار a را چنان بیابید که $f:\{1,2,3\}\ \to\ \mathbb{R}$ یک تابع باشد.**

$$f:\left\{(1,a),\left(1,a^2-2a\right),(2,3),\left(3,a^2\right)\right\}$$

۱) $a=0$ یا $a=3$

۲) $a=0$ یا $a=3$ یا $a=\pm\sqrt{3}$

۳) $a=\pm\sqrt{3}$

۴) هیچکدام

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

$$a^2-2a=a\ \Rightarrow\ a^2-3a=0\ \Rightarrow\ a(a-3)=0\ \Rightarrow\ a=0 \text{ یا } a=3$$

ـ **تعریف تابع تام :** تابع $f:A\to B$ تام است هرگاه $D_f=A$

ـ **تعریف تابع جزئی :** تابع $f:A\to B$ را تابع جزئی می‌نامیم هرگاه فقط در تعریف تابع صدق کند.

- ✓ **نکته:** با توجه به دو تعریف بالا می‌توان نتیجه گرفت هر تابع تام خود یک تابع جزئی است.
- ✓ **نکته:** تعداد توابع تام f از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B برابر با $m^n$ است.
- ✓ **نکته:** مجموعه تمام توابع تام از مجموعهٔ A به مجموعه B را با $B^A$ نمایش می‌دهیم واضح است که $\left|B^A\right|=|B|^{|A|}$ یعنی همواره مجموعه تابع دوم به توان مجموعه اول می‌رسد.
- ✓ **نکته:** تعداد توابع (توابع جزیی) از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B برابر $(m+1)^n$ .

**تعریف:** هرگاه $f:A\to B$ و $g:A\to B$ دو تابع باشند آنگاه:

$$\forall x\in D_f\cap D_g$$

$$\left(f\overset{*}{\pm}g\right)(x)=f(x)\overset{*}{\pm}g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

$$\forall x\in D_f\cap D_g\setminus\{x\,|\,g(x)=0\}$$

$$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g\setminus\{x\,|\,g(x)=0\}$$

**یادداشت:**

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

✓ **نکته:** هرگاه $\begin{matrix} f:A\to B \\ g:B\to A \end{matrix}$ دو تابع باشند آنگاه:

$$gof(x)=g(f(x))$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

✓ **نکته:** توابعی ضابطه دارند که خروجی آن‌ها یک عدد باشد.

✓ **نکته:** $fog$ برای هر تابعی می‌تواند تعریف شود.

**توجه ۱ـ** هرگاه $g,f$ دو تابع از A به B باشند آنگاه $f\bigcup g$ لزوماً تابع نمی‌باشد در حالی که $f\bigcap g$ همواره تابع است.

**توجه ۲ـ** بنا بر قرارداد $\phi$ یک تابع از A به B است.

ـ **تعریف تصویر معکوس تابع** : هرگاه $f:A\to B$ آنگاه برای $D\subseteq B$ , $f^{-1}(D)$ را تصویر معکوس D تحت f می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}(D)=\{x\in A \mid f(x)\in D\}$$

ـ **تعریف تصویر:** هرگاه $f:A\to B$ یک تابع باشد و $C\subseteq A$ آنگاه تصویر C تحت f را با $f(c)$ نمایش می‌دهیم.

$$f(c)=\{f(x) \mid x\in c\}$$

ـ **تعریف تابع یک به یک :** هرگاه $f:A\to B$ یک تابع باشد گوییم در صورتی یک به یک است که:

$$\forall x_1,x_2\in A\ \ (f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2)$$

به عبارت دیگر به ازای هر $y\in B$ حداکثر یک $x\in A$ وجود داشته باشد به طوری که $y=f(x)$ باشد.

✓ **نکته** : اگر $f:A\to B$ تابع تام یک به یک باشد آنگاه $|A|\le|B|$

ـ **تعریف تابع پوشا :** گوییم $f:A\to B$ پوشاست هرگاه $y=f(x)$ $\quad \forall y\in B\ ,\ \exists x\in A$

به ازای هر $y\in B$ حداقل یک x از A وجود داشته باشد به طوری که $y=f(x)$

**توجه:** اگر $f:A\to B$ آنگاه $\mathbb{R}=f(A)$ بدیهی است که $f:A\to B$ پوشاست اگر و تنها اگر

$R_f=B$ یا $B=f(A)$

✓ **نکته** : هرگاه $f:A\to B$ پوشا باشد آنگاه $|B|\le|A|$

ـ **تعریف تابع دو سویی:** گوییم تابع $f:A\to B$ دو سویی است هرگاه f یک تابع تام، یک به یک و پوشا باشد در این صورت گوییم **B , A** تناظر یک به یک دارند. **A** هم توان با **B** است.

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

- **نکته** : هرگاه $f:A \to B$ یک تناظر یک به یک داشته باشد آنگاه $|A|=|B|$
- **نکته** : تعداد توابع تام پوشا از مجموعه m عضوی $B(m \le n)$ برابر با $(m-k)^n$ است.
- **نکته** : تعداد توابع تام ناپوشا از مجموعه m عضوی $B(m \le n)$ برابر با $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$

**تست: فرض کنید A یک مجموعه ۸ عضوی و B یک مجموعه 5 عضوی باشد تعداد تمامی تابع های پوشا از A به B چند است؟**

۱) 65610 ۲) 2560 ۳) 126000 ۴) 340625

**حل** : گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم که تعداد توابع پوشایی که از یک مجموعه n عضوی باشد برابر با !n است و از A به B تعریف شده در نتیجه از 8 به 5 است. پس باید به 2 و 3 و 4 و 5 بخش پذیر باشد. پس به عبارتی دیگر باید به کلیه اعداد !5 یعنی $(2\times3\times4\times5)$ بخش‌پذیر باشد.

بنابراین تنها گزینه‌ای که بر !5 بخش‌پذیر است، گزینه ۳ می‌باشد.

- **نکته : تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی به مجموعه m عضوی همواره بر !m بخش‌پذیر است.**
- **نکته** : هر تابع، که از یک مجموعه $n\times n$ باشد و به یک مجموعه $n\times n$ برود، باید هم یک به یک و هم پوشا باشد.
- **نکته** : هرگاه $|A|=|B|=n$ آنگاه هر تابع تام $f:A \to B$ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

**نتیجه** : تعداد توابع تام (یک به یک) پوشا از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعه n عضوی B برابر !n است.

## اصل لانه کبوتری

هرگاه n کبوتر بخواهند در m لانه قرار گیرند به طوری که $n > m$ آنگاه حداقل در یک لانه بیش از یک کبوتر وجود دارد (حداقل 2 کبوتر)

**اصل لانه کبوتر تعمیم یافته:**

هرگاه n کبوتر بخواهند در m لانه قرار گیرند آنگاه در حداقل یک لانه $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ کبوتر قرار می‌گیرد.

- **نکته** : هرگاه $f:A \to B$ یک تابع تام باشد و $|A|=|B|<\infty$ باشد در این صورت f یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

**مثال: تعداد تابع** $f:\{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ **پوشا باشد چقدر است؟**

$$(4)_4 = \frac{4!}{(4-4)!} = 4!$$

می‌توان این سوال را با استفاده از اصل لانه کبوتر اثبات نمود.

- **نکته** : تعداد توابع پوشا (یک به یک تام) از مجموعه n عضوی A به مجموعه n عضوی B برابر با !n است.

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## پریش

منظور از پریش n شی «تعداد جایگشت‌های اعداد 1 تا n است به طوری که هیچ عدد iای در خانه iام قرار نگیرد» و آن را با نماد $d_n$ نمایش می‌دهند.

حال برای به دست آوردن $d_n$ این گونه عمل می‌کنیم:

از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم، ابتدا مجموعه‌های $A_1, ..., A_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$A_1$ : مجموعه تمام جایگشت‌های اعداد 1 تا n که عدد 1 در خانه اول قرار گیرد.

$A_2$ : مجموعه تمام جایگشت‌های اعداد 1 تا n که عدد 2 در خانه دوم قرار گیرد.

$\vdots$

$A_n$ : مجموعه تمام جایگشت‌های اعداد 1 تا n در خانه nام قرار گیرد.

به راحتی می‌توان دید که مجموعهٔ تمام جایگشت‌های نامطلوب (یعنی جایگشتی که حداقل یکی از اعداد به خانه هم شماره‌اش برود) برابر $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ است از طرفی دیگر داریم:

$d_n =$ (تعداد کل جایگشت‌های 1 تا n) ـ (تعداد جایگشت‌های نامطلوب) $= n! - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$

حال توجه کنید که به ازای هر i داریم $|A_i| = (n-1)!$ ، زیرا یک عنصر ثابت است و دیگر عنصرها را می‌توان به دلخواه جابجا کرد.در ضمن به عنوان مثال داریم:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (n-3)!$$

در واقع تعداد عناصر هر اشتراک K تایی برابر $(n-K)!$ است چون K عنصر را ثابت در نظر می‌گیریم و $(n-K)$ عنصر دیگر را به دلخواه جابجا می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$d_n = n! - (|A_1| + |A_2| + ...) + (|A_1| \cap |A_2| + ... + |A_{n-1} \cap A_n| +)$$

$$... + (-1)^n (|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|) = n! - \left( \underbrace{(n-1)! + ... + (n-1)!}_{n = \binom{n}{1}} \right) +$$

$$\left( \underbrace{(n-2)! + ... + (n-2)!}_{\binom{n}{2}} \right) - ... + \underbrace{(n-n)!}_{\binom{n}{n}=1}$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + ... + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

**یادداشت:**

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

از طرفی می‌دانیم $\binom{n}{r}(n-r)!=\frac{n!}{r!}$ در نتیجه :

$$d_n = n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-...+(-1)^n\frac{n!}{n!}=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

**مثال: پریش 5 بیتی را به دست آورید؟**

$$d_5 = 5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=5!-5!+\frac{5!}{2!}-\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{4!}-\frac{5!}{5!}$$
$$=60-20+5-1=44$$

✓ **نکته:**

تعداد جایگشت‌های حداقل یکی از عناصر با اندیس خود انطباق دارد $=|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|$

$$=\binom{n}{1}(n-1)!-\binom{n}{2}(n-2)!+...+\binom{n}{3}(n-3)!+...+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!$$

تعداد جایگشت های کل $=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!$

حالت خواسته $n!-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!=(-1)\binom{n}{0}n!+\sum_{k=1}^{n}(-1)^K\binom{n}{k}(n-k)$

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$$

**چند یاد آوری :**

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)!$$

$$d_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\underset{n\to\infty}{d_n}=n!e^{-1}$$

**یادداشت:**

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

✓ **نکته** : احتمال این که n عنصر با n جایگاه ، هیچ عنصری در جایگاه خودش قرار نگیرد.

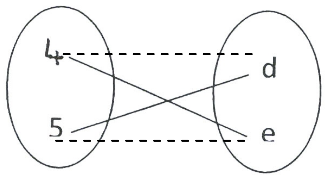
$$\frac{d_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

✓ **نکته** : اگر تعداد مهره‌ها و جایگاه‌ها به سمت بی‌نهایت باشد .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{dn}{n!}=e^{-1}$$

**مثال: تعداد توابع تام یک به یک** $\{1,2,3,4,5\}\to\{a,b,c,d,e\}$ **که** $f(1)\neq a$ ، $f(2)\neq b$ ، $f(3)\neq c$ **و** $f\{1,2,3\}=\{a,b,c\}$ **و** $f^{-1}\{d,e\}=\{4,5\}$ **چقدر است؟**

$$3!\sum_{K=2}^{3}\frac{(-1)^K}{K!}=2$$




$(2,2)=2!=2$

$2\times2=4$

**یادداشت:**

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

## اعداد استرلینگ

تعداد حالاتی که n فرد متمایز را بتوان حول m میز طوری قرار دارد که در پشت هر نفر حداقل یک نفر قرار گیرد (هیچ میزی خالی نباشد)را با استرلینگ نوع اول (first type stirling) نمایش می‌دهند.

$$\text{first type stirling} = ft - s(n,m)$$

به وضوح دیده می‌شود که

$$(n-1)!:ft-s(n,1)$$

ترتیب در این جا مهم نیست.

$$Ft-S(n,n)=1$$

$$Ft-S(n,m)=0 \qquad m>n$$

$$Ft-S(n,2)=(n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\binom{n}{k}(k-1)!(n-k-1)!$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\times\frac{n!}{k!(n-k)!}(k-1)!(n-k-1)!$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\times\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}(k-1)!(n-k-1)!$$

$$==n\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n!}{n}\left(\sum_{n=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)\right)=\frac{1}{2}(n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(n-1)!\times 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \;\Rightarrow\; (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

توجه کنید که :

$$\sum_{m=1}^{n} Ft-S(n,m)=n!$$

$$A(n)=\sum_{m=1}^{n} Ft-S(n,m)$$

$$A(n-1)=\sum_{m=1}^{n-1} Ft-S(n,m)$$

$$A(1)=1$$

$$A(n)=A(n-1)+(n-1)A(n-1)=nA(n-1)$$

**یادداشت:**

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

$A(n) = n!$

✓ **نکته:** $n! = \sqrt{2\pi}\, n\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

**تست: اگر $s(r,n)$ نمایش دهنده تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در n جعبه نامتمایز باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد کدام رابطه صحیح است؟**

۱) $s(r,n)=s(r-1,n)+ns(r-1,n-1)$ ۲) $s(r,n)=s(r-1,n-1)+ns(r-1,n)$

۳) $s(r,n)=s(r-1,n-1)+rs(r-1,n)$ ۴) $s(r,n)=s(r-1,n)+rs(r-1,n-1)$

**حل: گزینه ۲ صحیح است.**

## اعداد استرلینگ نوع دوم

به ازای $m \ge n$ ، $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ طریق برای توزیع m شی متمایز بین n ظرف شماره گذاری شده (که صرفه نظر از شماره یکسان تلقی می‌شوند) به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند وجود دارد. اگر شماره‌های ظرف‌ها را برداریم، که در نتیجه در ظاهر نیز یکسان باشند در می‌یابیم که هر توزیع بین این n ظرف یکسان (ناتهی) متناظر !n توزیع مشابه بین ظروف شماره دار است. از این رو، تعداد طرق ممکن برای توزیع m شی متمایز بین n ظرف یکسان، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند برابر است با :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

این عدد را با $S(m,n)$ نشان می‌دهیم و آن را یک عدد استرلینگ نوع دوم می‌نامند.

اگر $|B| = n$ ، $|A|=m \ge n$ آنگاه $S(m,n)$ ،!n تابع پوشا از A روی B وجود دارد.

اعداد استرلینگ را می‌توان با کمک جدول زیر نیز به دست آورد.

| S(m,n) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m \ n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
| ۱ | ۱ | | | | | | | |
| ۲ | ۱ | ۱ | | | | | | |
| ۳ | ۱ | ۳ | ۱ | | | | | |
| ۴ | ۱ | ۷ | ۶ | ۱ | | | | |
| ۵ | ۱ | ۱۵ | ۲۵ | ۱۰ | ۱ | | | |
| ۶ | ۱ | ۳۱ | ۹۰ | ۶۵ | ۱۵ | ۱ | | |
| ۷ | ۱ | ۶۳ | ۳۰۱ | ۳۵۰ | ۱۴۰ | ۲۱ | ۱ | |
| ۸ | ۱ | ۱۲۷ | ۹۶۶ | ۱۷۰۱ | ۱۰۵۰ | ۲۶۶ | ۲۸ | ۱ |

هرگاه $n=1$ باشد مقدار $S(m,1)=1$ خواهد بود.

هرگاه $n=m$ باشد در آن صورت $S(m,n)=1$ خواهد بود.

برای به دست آوردن بقیه اعداد جدول نیز کافی است روال جدول بالا پیروی کنید.

به عنوان مثال:

$$S(7+1,3)=966=63+3(301)=S(7,2)+3S(7,3)$$

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................