گراف کامل:

گراف G را کامل گوییم هر گاه هر دو راس آن با هم مجاور باشند.

از هر گراف کامل با n راس تنها یکی وجود دارد که آن را با K_n نشان می دهیم.

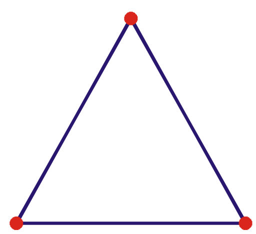
درجه ی هر راس گراف K_n، $n-1$ است چرا که هر راس با $n-1$ راس دیگر مجاور می باشد.

مثال:

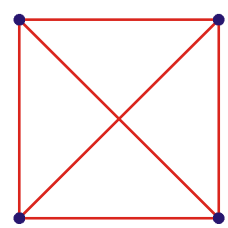
(1) k_1

(2) k_2

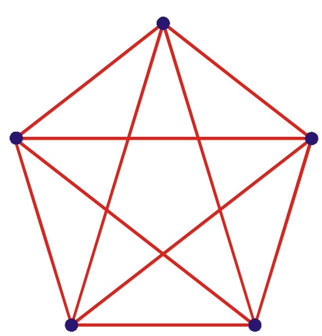
(3) k_3



(4) k_4



(5) k_5



- **تعداد یالهای K_n را محاسبه کنید:**

در واقع تعداد یالهای K_n، ماکسیمم تعداد یالهای یک گراف n راسی می باشد که همانگونــه کــه قــبلاً محاسبه شد برابر است با:

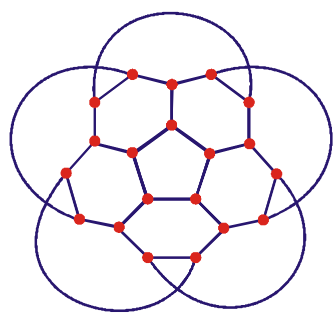
$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

گراف منتظم:

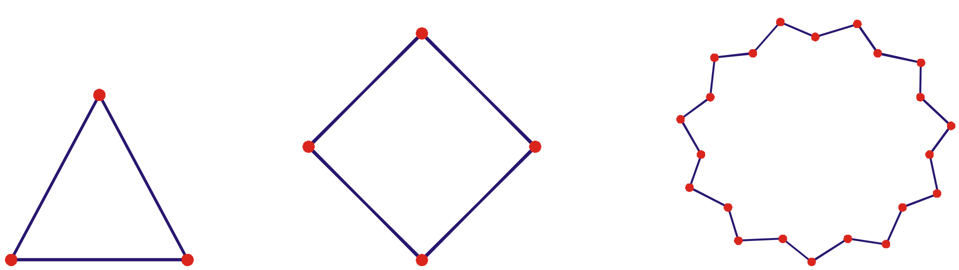
هر گاه درجه ی هر راس گراف G برابر r باشد، G را یک گراف r - منتظم گوییم. یا گراف منــتظم از درجه r. تعداد یالهای یک گراف r - منتظم n راسی برابر است با $\frac{nr}{2}$.

مثال. **هر گراف تهی یک گراف 0- منتظم و هر گراف n راسی کامل یک گراف $n-1$ -منتظم است.**

گراف زیر یک گراف 3 -منتظم است:



هرگراف دوری یک گراف 2- منتظم است:



قضیه. **در هیچ گراف r - منتظمی که r زوج است پل وجود ندارد.**

به خاطر آورید که در یک گراف همبند پل یالی است که با حذف آن گراف ناهمبند می شود.

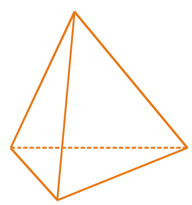
اثبات. فرض کنید چنین نباشد – پس G یک گراف منتظم از درجه ی $2h$ است و G دارای پـل مـی باشد – با حذف این پل، گراف G به دو گراف همبند نامجاور تبدیل می شود. که هر کـدام از ایـن دو دقیقـاً دارای یک راس فرد می باشد که امکان پذیر نیست.

مثال. ثابت کنید هر گراف فرد منتظم (یعنی گـراف $(2(k)+1)$منـتظم $k \in \mathbf{Z}$) تعـداد زوجـی راس دارد.

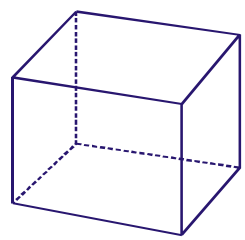
اثبات. به سادگی از آنجا که مجموع کل درجات باید زوج باشد به برهان خلف اگر تعـداد رئـوس فـرد باشد چون درجه هر کدام هم فرد است مجموع آنها فرد می شود نه زوج.

گراف افلاطونی :

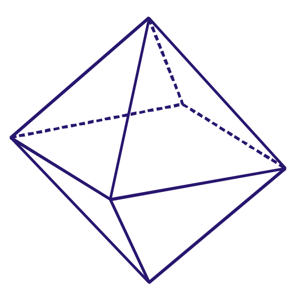
به هر چند وجهی که همه ی وجه های آن دو به دو بر هم منطبق بشوند یک چند وجهی منتظم گوییم. مثلاً مکعب یک شش وجهی منتظم می باشد. یونانیون باستان از وجوه پنج چند وجهی منتظم مطلع بودند که آنها را اجسام افلاطونی یا چند وجهیهای افلاطونی می نامیم. به زیبایی و با ابزار توپولوژی می توان اثبات کرد که جز این پنج چند وجهی، چند وجهی دیگری وجود ندارد. این پنج چند وجهی عبارتند از :



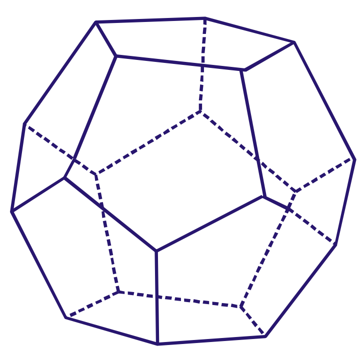
چهار وجهی منتظم.



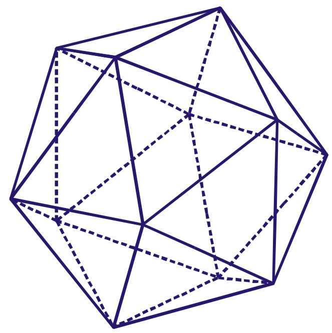
شش وجهی منتظم.



هشت وجهی منتظم.

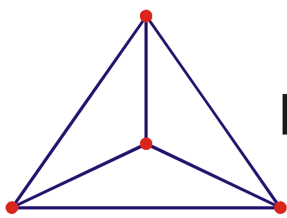


دوازده وجهی منتظم.

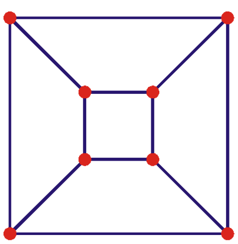


بیست وجهی منتظم.

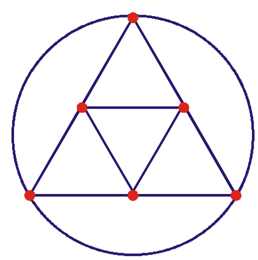
حال فرض کنیم بخواهیم تصویر هر یک از این اجسام را روی صفحه بکشیم – تصاویر بوجود آمـده را نمودار شلیگل $(Schlegel)$ می نامیم.



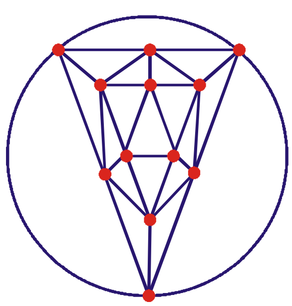
K_4

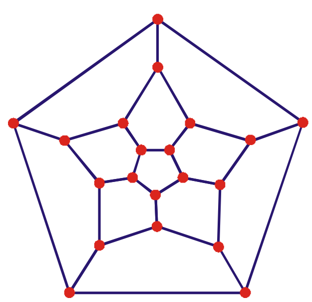


Q_3



O





D

همان طور که می بینید اگر رئوس چند وجهی را راسهای یک گراف و اضلاع آن را یالهای گراف فرض کنیم صاحب چند گراف می شویم که در بررسی خواص و ویژگیهای آنها به نتایج جالبی می رسیم. مثلاً هر یک از آنها منتظم است– از جمله گرافی که از تصویر کردن 12 وجهی بدست می آید را گراف همیلتونی می نامیم که بعداً خواص آن را با جزئیات بیشتری بررسی می کنیم. گراف بدست آمده از چهار وجهی همان K_4 است، بقیه ی گرافها را نیز به گونه ای که در شکل آمده است نام گذاری می کنیم.

گراف اشتراکی:

در اینجا می خواهیم گرافها را به وسیله ی مجموعه ها نمایش دهیم.

فرض کنیم مجموعه ی S و همچنین مجموعه ی n عضوی از زیر مجموعه های S را در اختیار داریم.

یعنی هر عضو C، زیر مجموعه ای از S می باشد. به ازای هر عضو C یک راس رسم می کنیم و در صــورتی که دو عضو C اشتراک ناتهی داشته باشند بین رئوس متناظر با آنها یالی رسم می کنیم. شکل حاصل را گراف اشتراکی مجموعه ی C نامیده و با $I(C)$ نمایش می دهیم.

مثال.

$$S = \quad ,C = \left\{ \underbrace{\{1,2,7\}}_{C_1}, \underbrace{\{3\}}_{C_2}, \underbrace{\{4,7,8\}}_{C_3}, \underbrace{\{1,3,7\}}_{C_4}, \underbrace{\{9,10\}}_{C_5} \right\}$$

به عنوان مساله اثبات کنید که هر گراف می تواند گراف اشتراکی یک مجموعه ی خاص باشد.

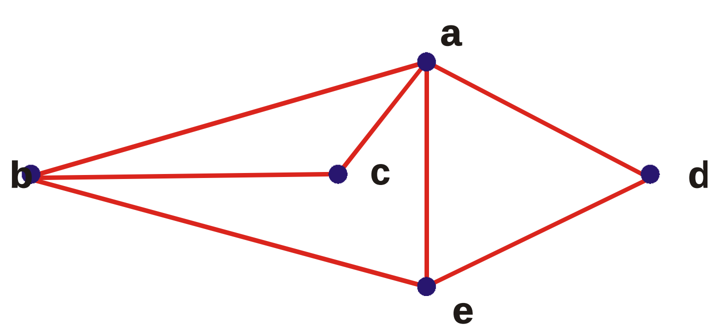
گراف های بازه ای:

در بخش قبل با گرافهای اشتراکی آشنا شدید. حال به جای مجموعه ی S در آنجا اعداد حقیقی R و به جای C، تعدادی از بازه های اعداد حقیقی را قرار می دهیم. به این نوع گراف، گراف بازه ای می گوییم

(یاد آوری: بازه ی $[a,b]$، زیر مجموعه ای از   است که:

$$x \in [a,b] \Leftrightarrow a \le x \le b$$

بر خلاف گرافهای اشتراکی که برای هر گراف، یک گراف اشتراکی وجود داشت، این امر برای گراف های بازه ای صادق نیست. یعنی گرافی می توان یافت که نتوان آن را به صورت یک گراف بازه ای تعریف کرد. پیدا کردن این گراف به صورت تمرین به عهده ی خواننده است. گراف I که در زیر آمـده مثـالی از یـک گـراف بازه‌ای است:



زیرا می توان فرض کرد که

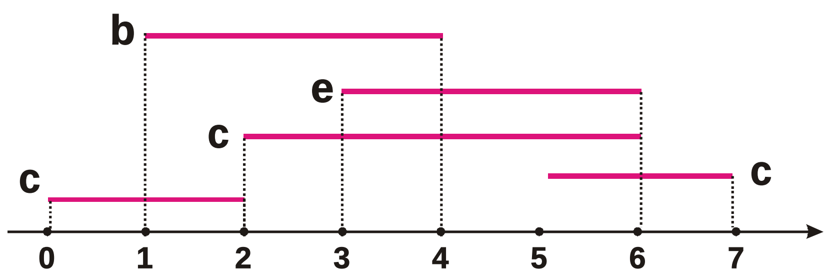
$a = [1,6]$

$b = [1,4]$

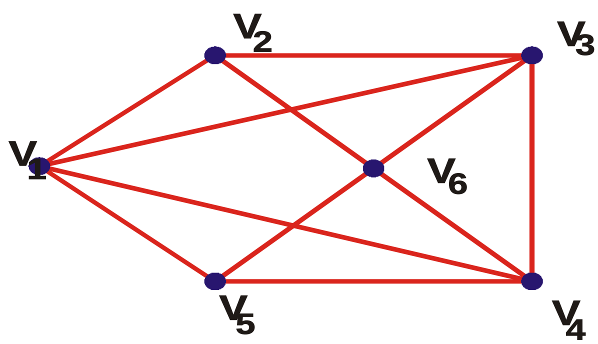
$c = [0,2]$

$d = [5,7]$

$e = [3,6]$



مثال. آیا گراف زیر می‌تواند یک گراف بازه ای باشد؟



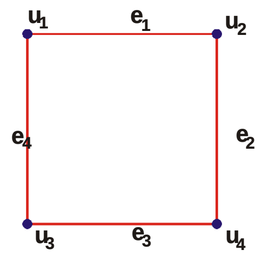
حل. برای جواب دادن به این سوال حالت کلی تر زیر را اثبات می کنیم.

هر گراف که یک گراف القایی 4 راسی دوری داشته باشد نمی تواند بازه ای باشد.

یعنی به بیان ساده تر در هر گراف اگر بتوان یک مربع (چهار راسی که با چهار یال متوالیاً به هم وصـل شده اند) یافت به قسمتی که بین چهار راس آن بجز چهار یال مربع یال دیگری نباشد آن گـراف الزامـاً نمـی تواند بازه ای باشد.

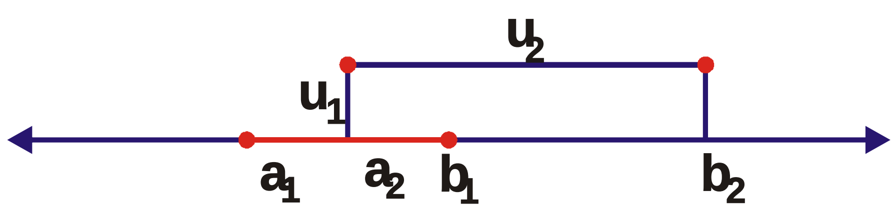
اثبات. چهار راس u_1, u_2, u_3, u_4 را در نظر بگیرید که با یالهای e_1, e_2, e_3, e_4 به شکل زیر به هم متصل

شده اند.



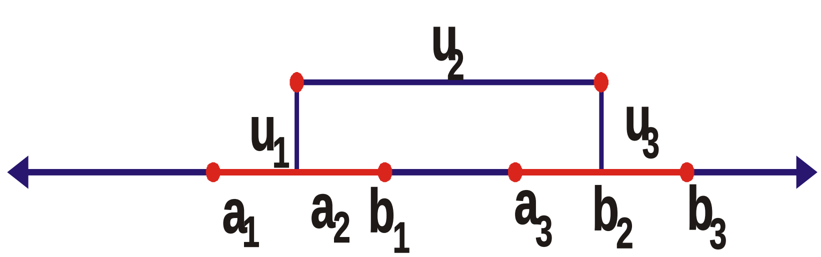
به برهان خلف اگر این گراف بازه‌ای باشد داریم:

بازه u_1 با u_2 اشتراک دارد پس شکلی مانند زیر دارند



به طریق مشابه u_3 هم با u_2 اشتراک دارد (به خاطر وجود یال $e_2 = u_2u_3$) و از طرفی چون با u_1 یالی ندارد پس u_3 با u_1 اشتراکی ندارد.

پس تنها حالتی که بتوان برای u_3 بازه ای فرض کرد که با بازه u_2 اشتراک داشته و با u_1 نداشته باشد به صورت زیر است



حال نوبت پیدا کردن بازه u_4 است. دقت کنید u_4 هم به u_1 هم به u_3 یال دارد ولی به u_2 یالی نــدارد

پس باید بتوان در شکل بالا بازه ای برای آن یافت که هم با بازه u_3 اشتراک داشــته باشــد و هــم بــا بــازه u_1

اشتراک داشته باشد و از طرفی از محدوده بازه هم نگذرد! که واضح است چنین چیزی ممکن نیست.

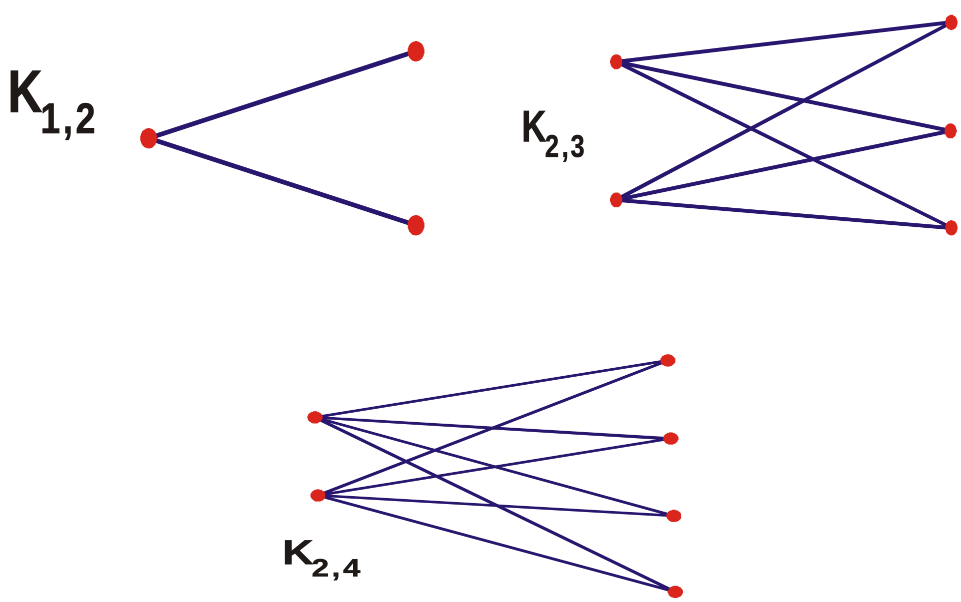
لذا فرض باطل و ثابت می گردد که چهار راس $u_4 u_3 u_2 u_1$ نمی توانند بازه‌های مناسب اختیار کنند.

گراف دو بخشی

اگر راس های گراف G به دو مجموعه N,M افراز گردند. به طوری که هنگام رسم گراف G، هیچ یالی بین راس های مجموعه ی M رسم نگردد و هیچ یالی بین راس هـای مجموعـه ی N نیـز ترسـیم نـشود، گراف G را یک گراف دو بخشی نامیم.

اگر M دارای m عضو و N دارای n عضو باشد، آنگاه گرافی که هر راس درون M را به همـه ی راس های N وصل کرده باشد را گراف دو بخشی کامل نامیده و با $K_{m,n}$ نشان می دهیم.

مثال.



به راحتی می توان دریافت که تعداد یالهای یک گراف دو بخشی کامل $K_{m,n}$ برابر است با $m\times n$.

قضیه. گراف G دو بخشی است اگر و تنها اگر G دارای هیچ دوری به طول فرد نباشد.

اثبات. اگر G دو بخشی باشد آنگاه اثبات این که هر دور در G به طول زوج است، ساده بوده و به عنوان تمرین به خواننده محول می کنیم.

و اما فرض می کنیم گراف فاقد دور فرد است و می خواهیم اثبات کنیم که G دو بخشی است. بدون ایجاد خلل در کلیت مساله، فرض می کنیم که G همبند باشد. چرا که اگر G ناهمبند باشد، مولفه های همبندی G نیز دور فرد ندارند و طبق اثباتی که ارایه خواهیم داد مولفه های همبندی نیز دو بخشی خواهند شد و در نتیجه گراف G دو بخشی خواهد بود. فرض کنیم G دارای n راس باشد از قرار :

$V_1, V_2, \ldots, V_n$

چون G همبند است، از V_1 به تمام راس ها حداقل یک مسیر وجود دارد. اگر طول این مسیر زوج بود. آن را در مجموعه ی A قرار می دهیم و اگر طول آن فرد بود آن را در مجموعه ی B قرار می دهیم. خود V_1 را نیز در مجموعه ی A قرار می دهیم. اولاً ثابت می کنیم چون G دور فرد ندارد، زوجیت طول مسیرهایی که از V_1 به V_i می روند یکسان است،یعنی اگر از V_1 به V_i دو مسیر باشد، یا هر دو با طول فردند یا با طول زوج.

پس از این نتیجه خواهد شد که $A \cap B = \varnothing$. در ضمن ثابت خواهیم کرد که هیچ دو راس مجموعه ی A به هم متصل نیستند و در ضمن هیچ دو راس مجموعه ی B نیز به هم متصل نیستند که حکم مساله خواهد بود.

اگر از V_1 به خودش یک مسیر فرد وجود داشته باشد، یعنی یک دور فرد داریم که ممکن نیست. پس از V_1 به V_i تنها مسیرهای زوج وجود دارد (مسیر به طول صفر هم داریم). اگر از V_1 به یکی از راس های دیگر مثلاً V_i یک مسیر با طول زوج و یک مسیر با طول فرد وجود داشته باشد،در آن صورت ثابت می کنیم

که یک دور به طول فرد در G وجود دارد.

l فرد $\quad , \quad T = V_1 t_1 t_2 \ldots t_l V_i$

k زوج $\quad , \quad J = V_1 j_1 j_2 \ldots j_k V_I$

فرض می کنیم $t_1 \neq j_1, t_l \neq j_k$. در T از t_1 شروع کرده و اولین جایی را بیابید که J,T نقاط مشترک دارند. آن را h بنامید. از V_1 شروع کنید و در J تا h پیش روید و سپس از مسیر T به ترتیب بر عکس از h به V_1 برگردید. این یک دور است. پس طول زوج دارد. پس در نتیجه از V_1 تا h در هر در مسیر J,T یا هر دو زوج و یا هر دو فرداند. حال الگوریتم فوق را برای مسیرهای از h تا V_i ، که قسمتهایی از J,T هستند، تکرار می کنیم. نهایتاً به دو مسیر J',T' از h' به V_i دست پیدا می کنیم که اشتراک ندارند و طولشان از نظر زوجیت فرق می کند. یعنی اگر طول T' فرد باشد آنگاه طول J' زوج خواهد بود و بالعکس.

از چسباندن J',T' به هم دوری به طول فرد به وجود می آید که تناقض آشکار است. پس B,A افرازی از راس های گراف اند که اگر دو نقطه از A مانند A_j, A_i به هم وصل باشند آنگاه دو مسیر J,T وجود دارند.

از V_1 به ترتیب به نقاط A_j, A_i که هر دو J,T از طول زوج اند. مسیر $V_1 \overset{T}{\ldots} A_i - A_j \overset{J}{\ldots} V_1$ دوری به طول فرد است که تناقض می باشد. همین طور می توان برای B استدلال آورد. پس گراف دو بخشی است.

پس از اثبات قضیه مهم و پرکاربرد بالا به سراغ مطالب ساده تر و بدیهی تر گراف های دو بخشی می‌رویم:

مثال. اگر گراف دو بخشی m و n راسی یک منتظم باشد به ازای چه n,m هایی چنین گرافی وجود

دارد؟

حل. به سادگی از آنجا که به ازای هر راسی از یک بخش و دقیقاً یک راس از بخش دیگر دقیقاً یک یال داریم، پس تعداد رئوس بخش ها یعنی $m = n =$ تعداد یالها

مثال. شرط لازم و کافی برای وجود گراف دو بخشی n,m راسی K منتظم را بیابید. $(K < n-1, K < m-1)$.

حل. این بار نیز ثابت می کنیم باید n,m برابر باشند.

اثبات. فرض کنیم گراف دو بخشی G که یک بخش آن m راس و بخش دیگر آن n راس دارد، منتظم و از درجه K است.

پس تعداد یالهای آن را می توان به دو گونه شمرد:

1. تعداد سرهای منتهی یالها به بخش اول $m.K$ تاست.
2. تعداد سرهای منتهی یالها به بخش دوم $n.K$ تاست.

و هر دو بیانگر تعداد یالها می باشند.

پس داریم: $mK = nK$

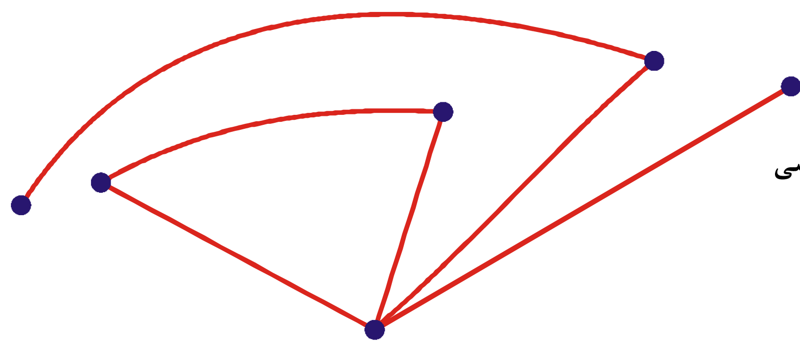
لذا $m = n$

برعکس. باید ثابت کنیم اگر $m = n$, $(K < (m-1 = n-1))$ باشد آنگاه گراف k منتظم مربوط وجود دارد. که اثبات آن به عنوان تمرین به خواننده محترم واگذار می شود.

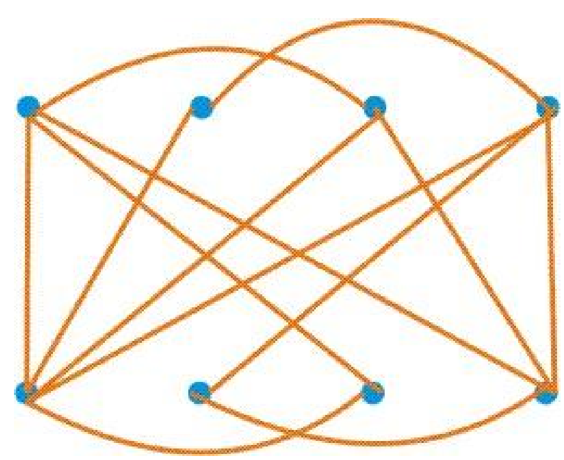
گراف چند بخشی

فرض کنید مجموعه ی راس های یک گراف G به n زیر مجموعـه $G_1, G_2, ..., G_n$ افـراز گـردد. G گراف چند بخشی است در صورتی که در G دو راس وقتی می توانند به هم به وسیله یال وصل شوند کـه دو راس عضو دو مجموعه ی G_i, G_j باشند به قسمی که $G_i \neq G_j$.

مثلاً گراف زیر گراف های 3بخشی و 4 بخشی را نشان می دهند :



یک گراف 3 بخشی



یک گراف 4 بخشی

گراف n بخشی را کامل گویند هر گاه همه ی یالهای ممکن بین راس های آن کشیده شده باشد. اگـر

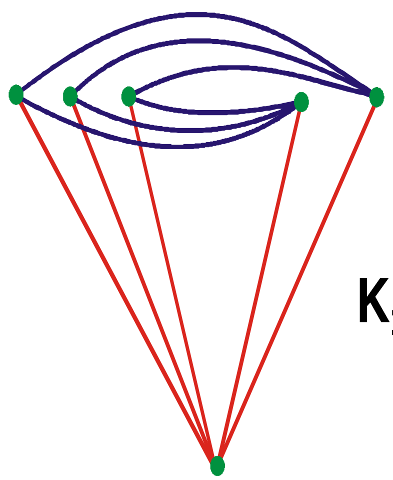
G یک گراف n بخشی کامل باشد.

به قسمی که G به n مجموعه ی G_i $(1 \le i \le n)$ افراز شده باشد که به ازای هر i، هیچ دو راسـی

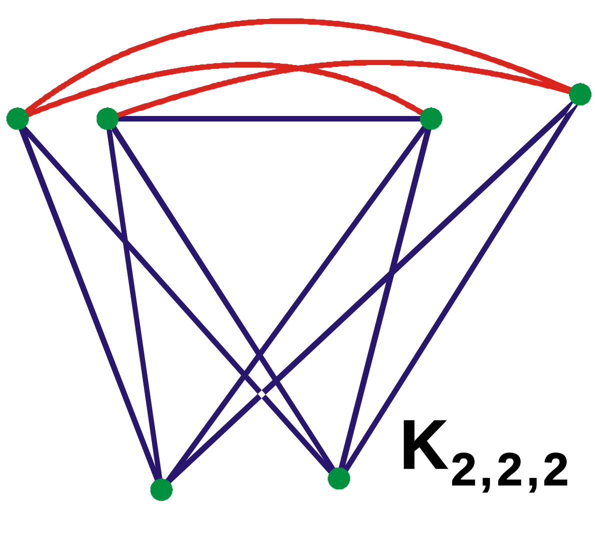
از G_i به هم متصل نباشند، و نیز $|G_i| = a_i$

آنگاه گراف G را با نماد روبرو نمایش می دهیم: $K_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$

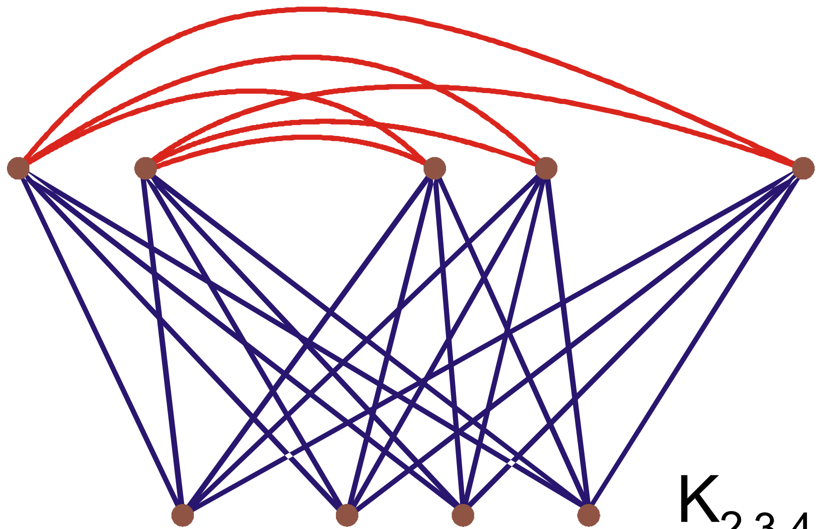
مثال. گراف های زیر نمونه هایی از گراف های چند بخشی کامل هستند.



$K_{1,2,3}$



$K_{2,2,2}$



$K_{2,3,4}$

تعداد یالهای یک گراف $K_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}$ برابر است با $a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$

برخلاف گراف های در بخشی کامل، گرافهای چند بخشی کامل همیشه منتظم نیستند. مگـر گرافهـای کامل دو بخشی به صورت $K_{a_1,a_2,...,a_n}$ به قسمی که $a_1 = a_2 = ... = a_n$ – در این صورت درجه هر راس از ایـن گراف برابر است با $a_1 \times (n-1)$ – چرا که مجموعه ی راس های $K_{\underbrace{a,...,a}_{n}}$ ، به n زیر مجموعه ی مساوی هر کدام با a عضو افراز می شود و از هر راس از یکی از این زیر مجموعه ها به سایر زیر مجموعه ها یـال رسـم می شود. از آنجا که هر زیر مجموعه شامل a راس است، از هر راس $a \times (n-1)$ یال خارج می گردد.