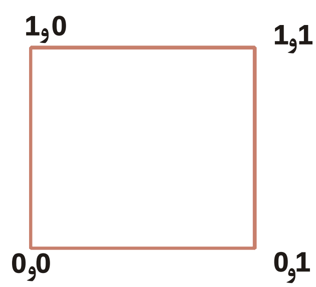
گرافهای $k-$مکعب:

گراف $k-$مکعب گرافی است که رئوس آن دنباله های غیر تکراری k تایی از 0 و 1 به صورت $(a_1,a_2,...,a_k)$ باشد. و یالهای آن، میان رئوس رسم شوند که دقیقاً در یک جایگاه متفاوت باشند.

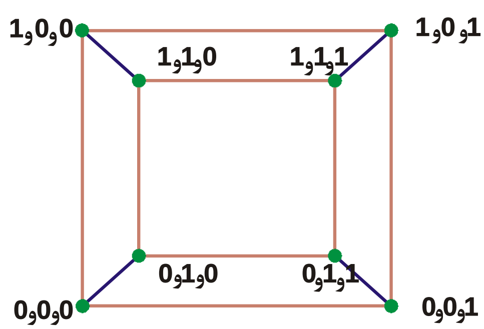
این گراف ها را که با Q_k نمایش می دهند خصوصیت های جالبی دارند که پس از چند مثال به خواص آنها می پردازیم.

Q_1 :

Q_2 :

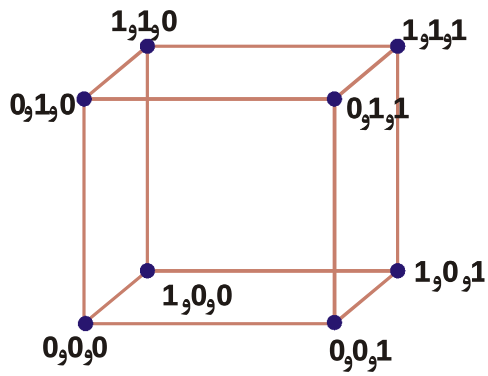


Q_3 :



دقت کنید گراف مکعب همان Q_3 می باشد که گاهی به صورت زیر نیز رسم می گردد.

نمایش دیگر Q_3



دقت کنید Q_1, Q_2, Q_3 به ترتیب بیانگر فضاهای یک بعدی (خط)، دو بعدی (صـفحه) و سـه بعـدی (فضا) بوده اند.

قضیه. ثابت کنید گراف $k-$مکعب همبند است.

کافی است به ازای هر دو راس v,u با دنباله های زیر، مسیری میان آن دو بیابیم.

$$u = (a_1, a_2, ..., a_k)$$

$$v = (b_1, b_2, ..., b_k)$$

به طور خلاصه اگر اثبات را بیان کنیم داریم:

اگر u با v در m جایگاه تفاوت داشته باشد، از u نخست به راسی می رویم که با u در جایگاه اول از آن m جایگاه متفاوت باشد. سپس از آن به راسی می رویم که علاوه بر جایگاه اول در جایگـاه دوم از آن m جایگاه با u متفاوت باشد و به همین ترتیب ادامه می دهیم تا به v برسیم.

واضح است جنین مسیری وجود خواهد داشت.

تمرین. تعداد یالهای گراف $k-$مکعب را بدست آورید.

حل. برای این منظور نخست تعداد راسها را بدست می آوریم:

چون رئوس دنباله های متفاوت k تایی از 0 و 1 می باشند پس بنابر اصل ضرب تعـداد آنهـا 2^k تـا می‌باشد. سپس درجه هر راس را بدست می آوریم:

از آنجا که به هر راس یک دنباله k تایی از 0 و 1 متناظر شده و هر راس تنها به رئوسی متـصل مـی گردد که دقیقاً در یک جایگاه با آن تفاوت دارند پس همسایه های هر راس عبارتند از :

راسی که فقط درجایگاه اول با آن تفاوت دارد

و راسی که فقط در جایگاه دوم با آن تفاوت دارد

و ...

تا راسی که فقط در جایگاه kام با آن تفاوت دارد.

و این یعنی درجه هر راس k می باشد

پس

$$\text{تعداد یالها} = \frac{k \times 2^k}{2} = k\,2^{k-1}$$

نتیجه. به راحتی دیده شد گراف $k-$مکعب، k منتظم می باشد.

قضیه. ثابت کنید Q_k گرافی دو بخشی می باشد.

برای این منظور بایستی رئوس آن را به دو بخش B, A به گونه ای افراز کرد که یالی مـا بـین رئـوس داخل یک بخش موجود نباشد:

بدین منظور:

رئوسی که دنباله آن تعداد زوجی عدد **1** دارند $= A$

رئوسی که دنباله آن تعداد فردی عدد **1** دارند $= B$

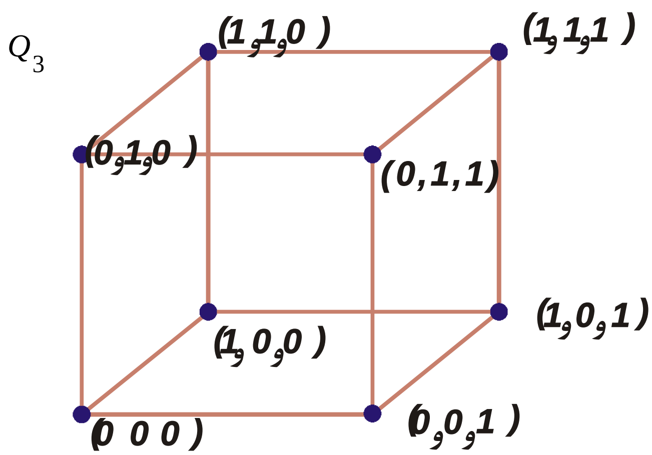
حال یالی میان رئوس A وجود نخواهد داشت زیرا اگر وجود داشته باشد. و آن یال uv باشد که $u,v\in A$ پس خواهیم داشت:

زیرا v,u دقیقاً در یک جایگاه تفاوت دارند $\rightarrow \pm 1$ تعداد **1** های $u =$ تعداد **1** های v

پس v,u نمی توانند از لحاظ زوجیت و فردیت مانند هم باشند.

پس یالی که رئوس A را به هم یا رئوس B را به هم وصل کند وجود نداشته و گراف دو بخشی خواهد بود.

مثال.



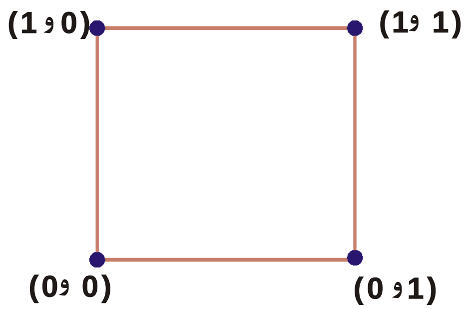
در Q_3، رئوس آبی متعلق به یک بخش و رئوس سیاه متعلق به بخش دیگر گراف دو بخشی خواهند بود

و اما آخرین و جذابترین خصوصیت گرافهای k–مکعب همیلتونی بودن آنهاست. در ایــن رابطــه بــه قضیه زیر می پردازیم:

قضیه. ثابت کنید که گراف k–مکعب هامیلتونی است. $(k \geq 2)$

اثبات به استقرا.

برای $k=2$ که بدیهی است



فرض می کنیم برای $k=m-1$, $(m-1)$–مکعب هامیلتونی باشد یعنــی دنبالــه ای از رئــوس بــه صورت

$$u_1 u_2 u_3 \dots u_{2^{m-1}} u_1$$

وجود دارد که هر کدام به بعدی یال داشته و $u_{2^{m-1}}$ هم به u_1 یال داشته باشد.

می خواهیم برای $k=m$، ثابت کنیم دنباله رئوسی به صورت

$$v_1 v_2 \dots v_{2^m} v_1$$

وجود دارد که $v_i = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$ و تشکیل یک دور هامیلتونی را بدهند.

از روی فرض استقرا دنباله v_iها را به صورت زیر می سازیم

$$w_1 w_2 \dots w_{2^{m-1}} X_{2^{m-1}} X_{2^{m-1}_{-1}} \dots X_2 X_1 W_1$$

که

$w_i = (1,u_i) \rightarrow$ **یعنی به سر رشته u_i یک 1 اضافه می کنیم**

$X_i = (0,u_i) \rightarrow$ **یعنی به سر رشته u_i یک 10 اضافه می کنیم**

واضح است که در این دنباله هر راس دقیقاً یکبار آمده . ولیکن باید ثابت کنیم هر دو راس متوالی مجاور نیز هستند.

برای اثبات آنکه هر دو راس متوالی، مجاورند حالات زیر را داریم:

1. **رئوس متوالی w_i, w_{i+1} باشند که واضح است چون**

$$\left.\begin{array}{l} w_i = (1,u_i) \\ w_{i+1} = (1,u_{i+1}) \\ \text{بنابر فرض استقرا} \\ \text{تنها در یک } u_{i+1}, u_i \\ \text{جایگاه تفاوت دارند.} \end{array}\right\} w_{i+1}, w_i \text{ تنها دریک جایگاه تفاوت دارند } \Rightarrow w_i w_{i+1} \in E$$

2. **رئوس متوالی X_i, X_{i+1} باشند: مانند بالا**

3. **رئوس متوالی $w_{2^{m-1}}, X_{2^{m-1}}$ باشندکه داریم**

$$\left.\begin{array}{l} w_{2^{m-1}} = (1,u_{2^{m-1}}) \\ X_{2^{m-1}} = (0,u_{2^{m-1}}) \end{array}\right\} \Rightarrow w_{2^{m-1}}, X_{2^{m-1}} \text{ در جایگاه اول تفاوت دارند} \Rightarrow w_{2^{m-1}} X_{2^{m-1}} \in E$$

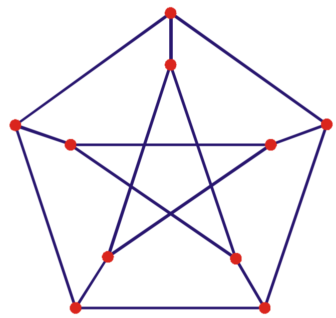
4. **رئوس متوالی w_1, X_1 باشند که مانند قبل داریم:**

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = (1,u_1) \\ X_1 = (0,u_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تنها در جایگاه اول تفاوت دارند } X_1, w_1 \Rightarrow X_1 w_1 \in E$$

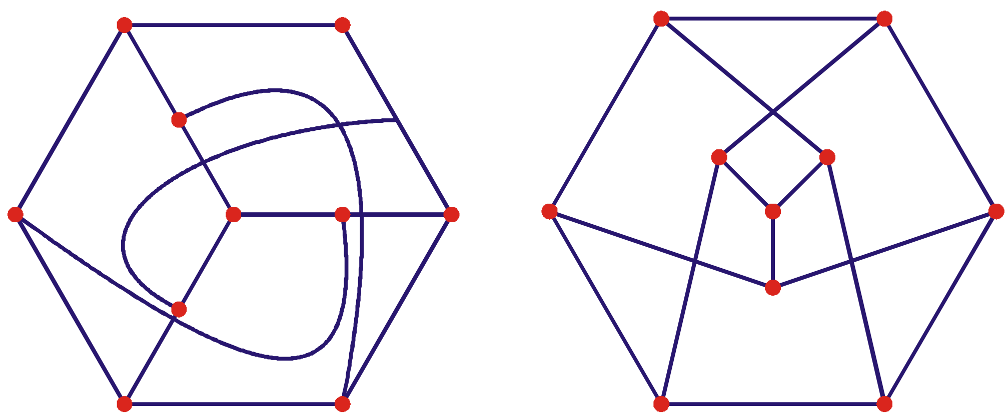
لذا دنباله $w_1 w_2 \ldots w_{2^{m-1}} X_{2^{m-1}-1} \ldots X_2 X_1 w_1$ معرف دور همیلتونی خواسته شده می باشد.

گراف پترسن $(Petersen\,Graph)$

گراف پترسن گرافی با 10 راس و $3-$ منتظم است که به صورت زیر رسم می گردد:



صورت های یکریخت با گراف پترسن به صورت زیر می توان یافت:



گراف پترسن دارای خواص دیگری نیز می باشد که البته در فصل های آینده و در جای خـود بـه آنهـا اشاره خواهد شد. از جمله اینکه این گراف غیر همیلتنی و نامسطح است.

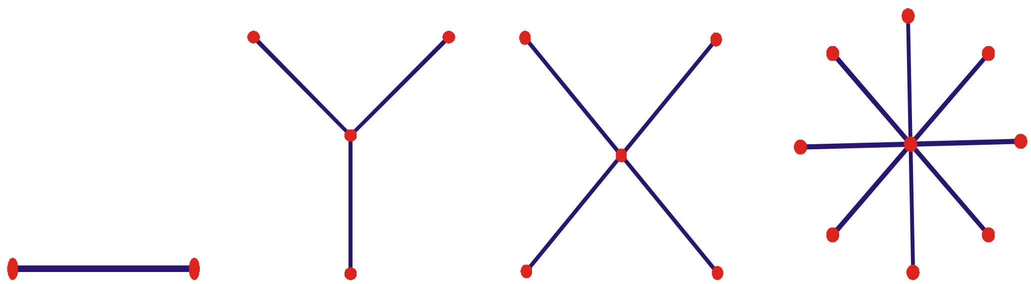
همان گونه می توان از روی شکل دریافت از انقباض گراف پترسن می توان به گراف K_5 رسید. (بـرای

تعریف انقباض به گره، حذف و انقباض از اعمال روی گراف مراجعه کنید.)

در بخش مربوط به گراف های خط به عنوان تمرین ثابت خواهید کرد که گراف خط k_5 $\left(L(k_5)\right)$ مکمل گراف پترسن است.

گراف ستاره:

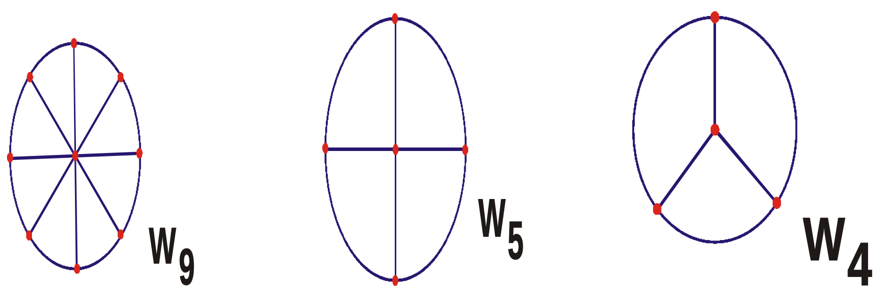
به هر گراف G با n راس به قسمی که یک راس از درجه ی $n-1$ باشد و $n-1$ راس دیگر از درجه یک باشند، یک گراف ستاره گوییم. گرافهای زیر مثالهایی از گراف های ستاره هستند.



گراف های ستاره در حالت کلی درخت هستند و در واقع گرافهای دو بخشی کامل به صورت $k_{1,n}$ می‌باشند.

گراف چرخ

هر گراف G که دارای n راس باشد که $n \geq 4$ و یکی از رئوس از درجه ی $n-1$ و بقیه از درجــه ی سه باشند، را یک گراف چرخ می نامیم- مانند مثال های زیر:

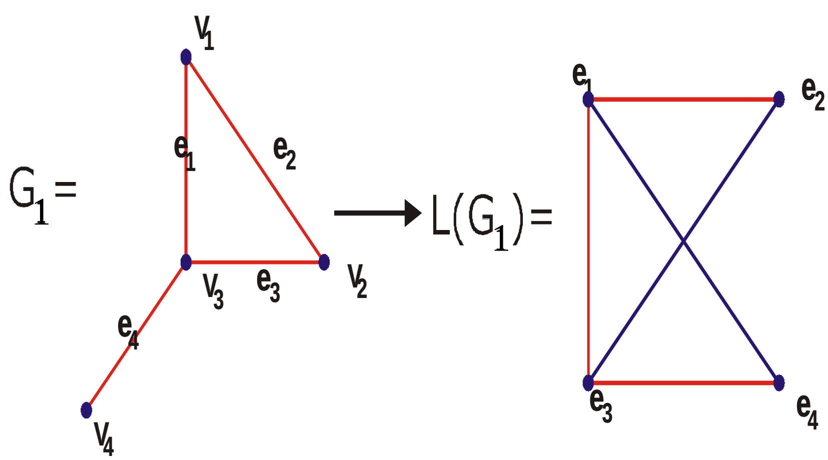


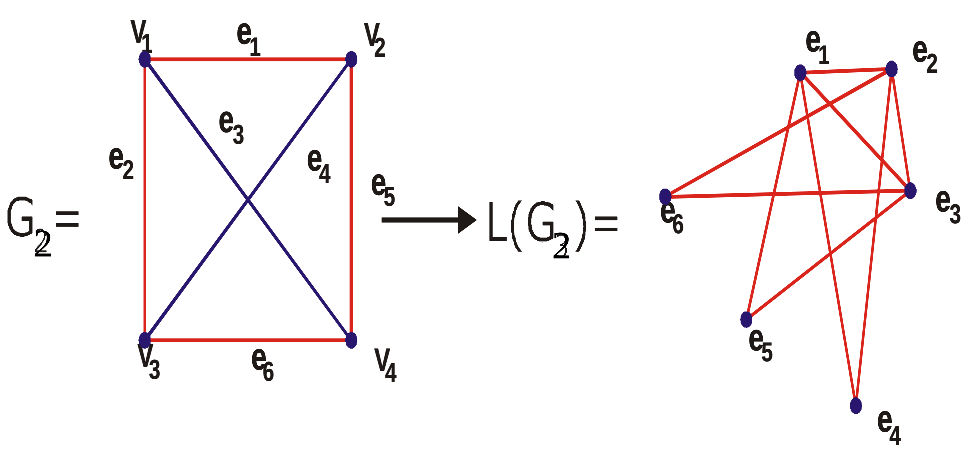
گراف چرخ n راسی را با W_n نمایش می دهیم.

گراف خط

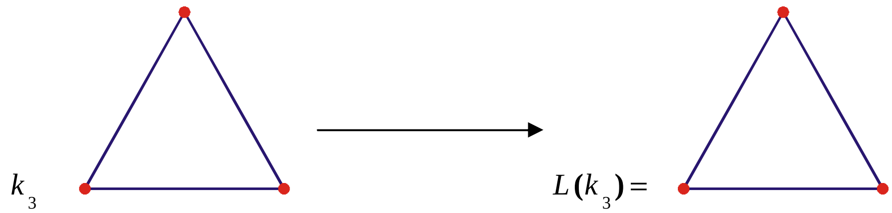
گراف غیر تهی G را در نظر بگیرید. اگر به جای هر یال G، راسی در نظر بگیریم و دو راس را به هم متصل کنیم در صورتی که یالهای متناظر با آن دو راس در G، در یک راس از G با هم مشترک باشند. گراف حاصل را با $L(G)$ نشان داده و آن را گراف خط G می نامیم.

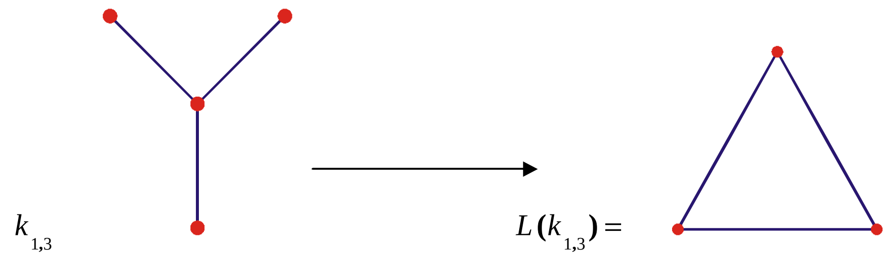
مثال.





همچنین در گراف غیر یک ریخت ممکن است گراف خطهای یک ریخت داشته باشند:





قضیه. اگر G ، r - منتظم باشد و دارای n راس، آنگاه $L(G)$ نیز منتظم و از درجه $2(r-1)$ می باشد.

اثبات. هر یال گراف G به دو راس ختم می شود که به هر یک از این راس ها به جز یال مذکور، $r-1$ یال دیگر وارد می شوند. یال مذکور تنها با این $2(r-1)$ یال راس مشترک دارد و در این یال راس گراف $L(G)$ است که به $2(r-1)$ راس دیگر متصل است. پس $L(G)$ یک گراف $(2r-2)$ منتظم است.

مکمل یک گراف و گراف خود مکمل

مکمل یک گراف ساده:

فرض کنید G یک گراف ساده، با مجموعه رئوس $V(G)$ است مکمل G که با $\overline{G}$ نمایش می دهند یک گراف ساده دیگر است که همان مجموعه رئوس $V(G)$ را دارد و در آن هر دو راسی که در G مجاور نبوده اند مجاور می باشند.

- **توجه کنید تعداد یالهای گراف G به علاوه یالهای مکمل آن برابر یالهای گراف کامل $|V(G)|$ راس خواهد شد.**
- **مکمل گراف کامل تهی است و بالعکس.**
- **مکمل یک گراف دو بخشی کامل عبارتست از اجتماع دو گراف کامل (اثبات به عهده شما!)**

به عبارت ساده تر مکمل گراف ساده G همان گراف G است فقط هر جا یال داریم آن را حذف و هر جا نداریم آن را اضافه می کنیم

قضیه. **اگر گراف G ناهمبند باشد $\overline{G}$ همبند است**

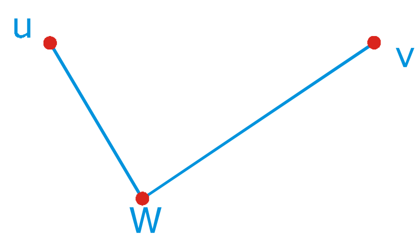
این قضیه را بعداً در فصل همبندی به روش دیگری نیز اثبات خواهیم کرد. اثبات (برهان خلف) فرض می کنیم $\overline{G}$ ناهمبند است یعنی $\overline{G}$ از حداقل دو مولفه تشکیل شده است دو راس دلخواه v,u را از G (که $\overline{G}$ نیز تعلق دارند) در نظر می گیریم.

v,u هر دو یا به دو مولفه متمایز $\overline{G}$ تعلق دارند یا هر دو در یک مولفه $\overline{G}$ واقعند.

اگر v,u در دو مولفه متمایز $\overline{G}$ باشند آنگاه v,u در $\overline{G}$غیر همجوراند بنابراین در G همجوارند با مسیری به طول یک و این با فرض ناهمبند بودن G در تناقض است.

اگر v,uدر یک مولفه $\overline{G}$ باشند راسی مانند w در مولفه دیگر $\overline{G}$ در نظر می گیریم w در $\overline{G}$ نه با u و نه با v همجوار است. بنابراین w در G هم با u و هم با v همجوار خواهد بود. یعنی در G مسیری به طول **2**، دو راس v,u را به هم متصل می کند.

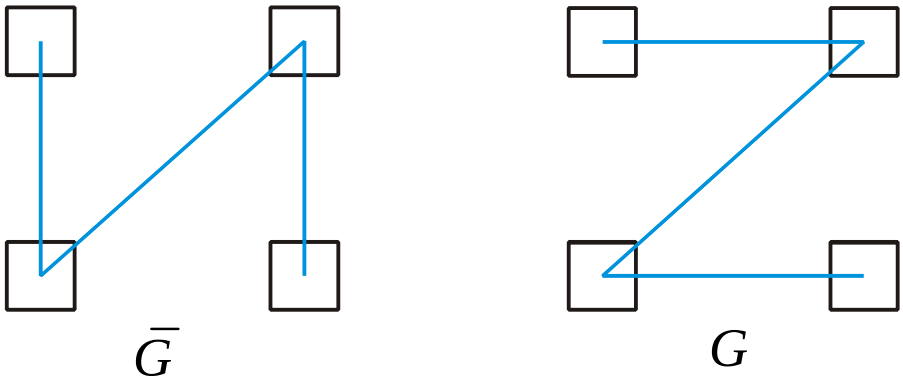
بنابراین نشان دادیم مسیری بین دو راس دلخواه وجود دارد.



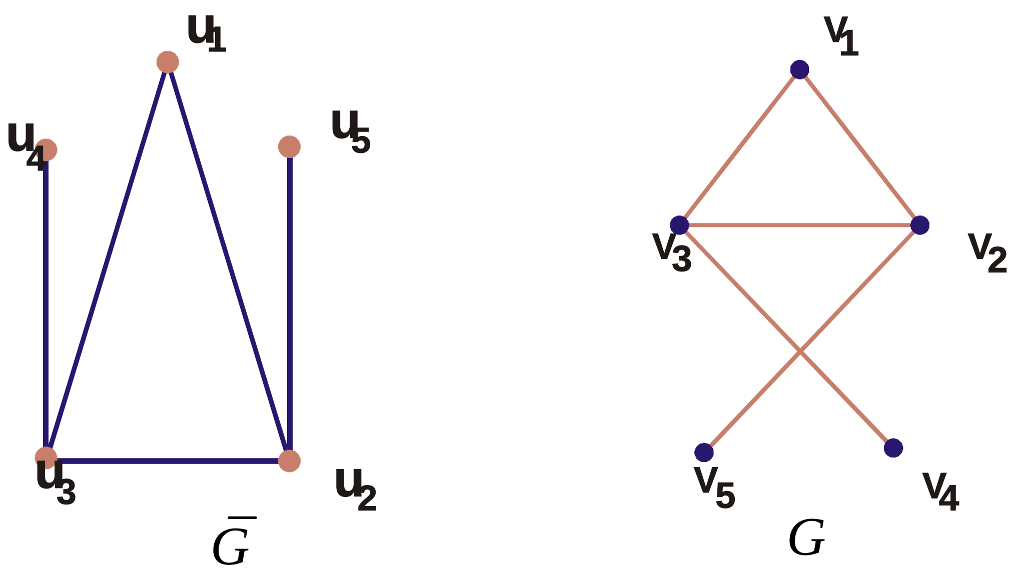
گراف خود مکمل:

گراف G را خود مکمل گویند اگر G و $\overline{G}$ یکریخت باشند.

مثال. گراف چهارراسی زیر خود مکمل است.



گراف 5 راسی زیر نیز خود مکمل است.



G و $\bar{G}$ در بالا یکریختنند زیرا کافی است برای هر i، u_i را با v_i متناظر بگیرند.

تمرین مهم.

شرط لازم و کافی برای وجود یک گراف خود مکمل n راسی را بیابید.

حل به عهده کاربر محترم.

راهنمایی. شرط لازم و کافی این است که $n = 4k$ یا $n = 4k + 1$ $(k \in \mathbf{Z})$ باشد. و برای اثبات آن از مجموع درجات می توانید کمک بگیرید.

قضیه. هرگراف خود مکمل همبند است.

فرض می کنیم گراف ساده G خود مکمل است یعنی G با $\overline{G}$ یکریخت است. باید نشان دهیم G همبند است. برهان خلف را به کار می بریم یعنی فرض می کنیم G ناهمبند است. در این صورت طبق قضیه قبل $\overline{G}$ همبند است. از طرفی می دانیم G و $\overline{G}$ یکریختند. ضمناً یکریختی حافظ همبندی است. بنابراین G نیز باید همبند باشد که با فرض برهان خلف (ناهمبندی G) تناقض دارد. بنابراین G نمی تواند نا همبند باشد یعنی G همبند است.

اعمال روی گرافها:

اعمال اولیه:

گرافها به عنوان مفاهیمی در ریاضیات گسسته، قابلیت تعریف اعمالی را دارند که بعضاً به شـــرح زیـــر بیان می گردد:

همانطور که تاکنون آشنا شدیم؛

حذف راس : اگر راس v را از گراف G که $v \in V(G)$ می باشد حذف و تمام یالهای مربوط به آن را از $E(G)$ کم کنیم آنچه می ماند را با $G-V$ نمایش داده و به این عمل حذف راس می گویند.

حذف یال: مشابه بالا با حذف فقط یک یال e از گراف G که $e \in E(G)$ مـــی باشـــد بـــه $G-e$ یـــا $G-\{e\}$ می رسیم

افزودن راس یا یال: برعکس دو تعریف بالا با افزودن راس به گراف $G+\{V\}$ بـــه گـــراف $G+V$ مـــی رسیم و با افزودن یک یال بین دو راس G به گرافی می رسیم که آن را با $G+\{V\}$ یا $G+V$ نمایش مـــی دهند.

زیر گراف القایی: با تعریف زیرگراف القایی آشنا هستیم.

لذا اگر $V' \subseteq V(G)$ باشد، گراف $G\left[V^1\right]$ زیر گراف القایی G روی V^1 و گـــراف $G\left[V \setminus V^1\right]$ زیـــر گراف القایی روی $V(G)-V'$ را می دهد.

اگر $V'=\{V\}$ آنگاه $G-\{V\}=G\left[V\setminus V^{1}\right]$ که به اختصار می نویسیم $G-V$

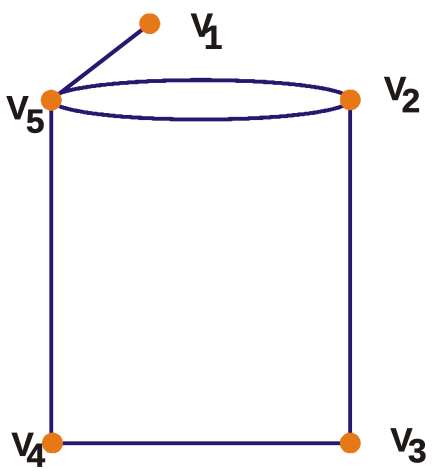
مکمل گیری: با تعریف مکمل G نیز آشناییم و آن را با $\bar{C}$ نمایش می دهیم.

$$V(\bar{G})=V(G)$$

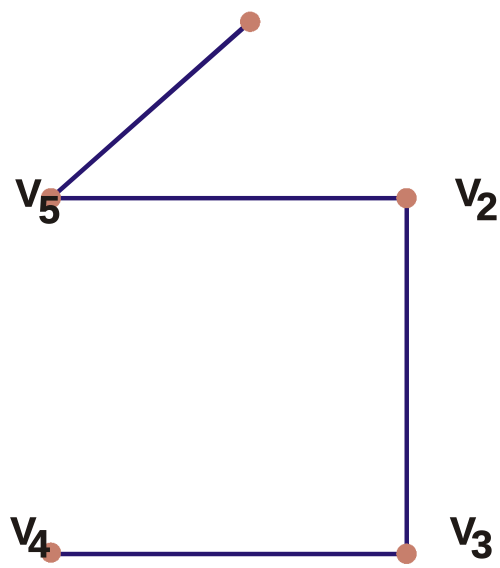
$$E(\bar{G})=\{(x,y)|x,y\in V'(G),xy\notin V(G)\}$$

مثال. اگر $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

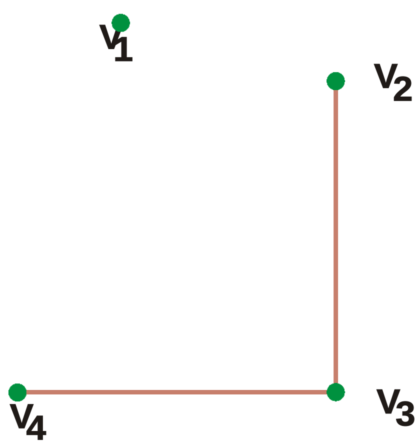
Gبه صورت روبرو باشد.



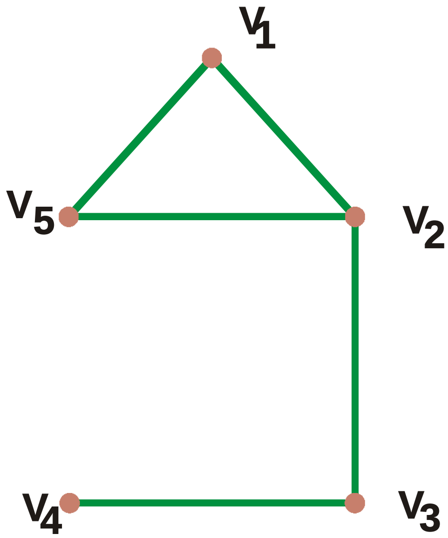
داریم:



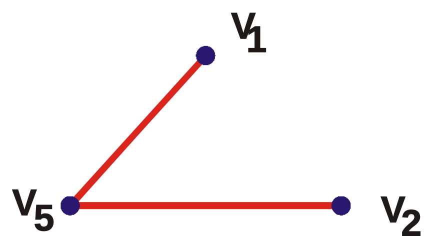
$G-\{V_4V_5\}$



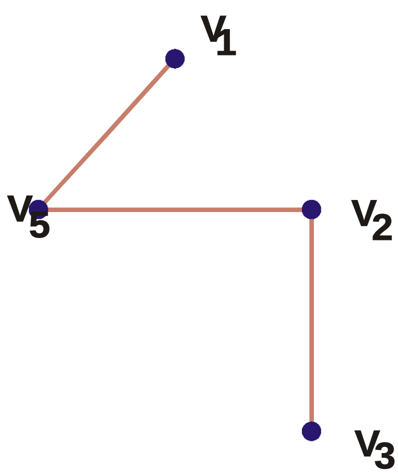
$G-V_5$



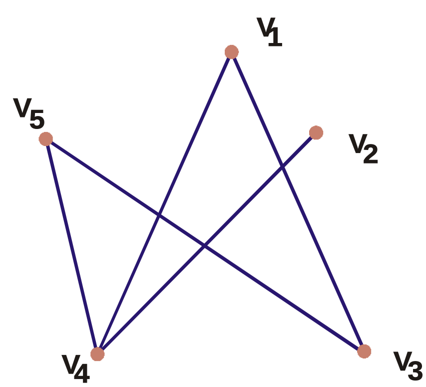
$G+\{V_1V_2\}$



$G\left(\{V_1,V_2,V_5\}\right)$



$G\left(V\setminus\{V_4\}\right)=G-V_5$



$\bar{G}$

عمل پیوند دو گراف:

پیوند H,G، که به صورت GVH نمایش داده می شود عبارت است از $G+H$ با افـزودن یالهـای زیر: $\{uv \mid u\in V(G), v\in V(H)\}$