اجتماع دو گراف:

نخست تعریف می کنیم دو گراف G_2, G_1 مجزا هستند اگر هیچ راس مشترکی نداشته باشند و مجزا یالند اگر هیچ یال مشترکی نداشته باشند و مجزا یالند اگر هیچ یال مشترکی نداشته باشند. به عنوان مثـال در زیر G_2, G_1 مجزا یالی می باشند ولی مجزا راسی نیستند.

$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$V(G_2) = \{v_2, v_3, v_4, v_{10}\}$$

$$E(G_1) = \{v_1 v_2, v_2 v_3\}$$

$$E(G_2) = \{v_3 v_4, v_4 v_{10}, v_2 v_4\}$$

$$V(G_1) \cap V(G_2) = \{v_2, v_3\}$$

$$E(G_1) \cap E(G_2) = \{\ \}$$

حال اجتماع دو گراف G_2, G_1 را به صورت $G_1 \cup G_2$ تعریف می کنیم که :

$$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2), V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

اگر G_2, G_1 مجزا نیز باشند اجتماع آنها به صورت $G_1 + G_2$ نیز نمایش داده می شود پس در این جا با عمل جمع دو گراف نیز آشنا شدیم:

اگر G_2, G_1 مجزا باشند $G_1 + G_2 = G_1 \cup G_2$

اشتراک دو گراف:

اگر G_2, G_1 لااقل یک راس مشترک داشته باشند (مجزا نباشند) آنگاه

$$G_1 \cap G_2 : V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2)$$

$$E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2)$$

حذف و انقباض:

همانطور که در قبل گفته شد گراف حاصل از $G-e$ گراف است که تنها یال e از آن حذف شده باشد و مشابه آن $G-V$ گراف G است که راس v و تمام یالهای واقع بر آن حذف شده باشد.

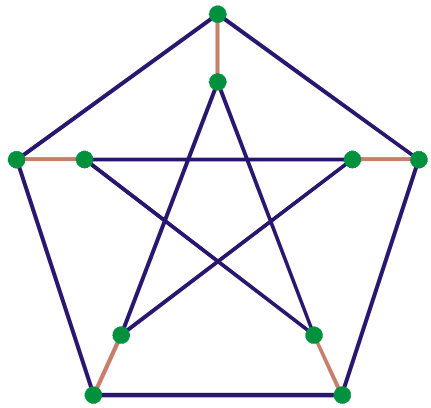
اما انقباض یال e الزاماً گرافی که زیر گراف G هم باشد به ما نمی دهد زیرا در انقباض یال $e=vw$ که به صورت $G\setminus e$ نشان می دهیم، گراف حاصل گرافی است که در آن نه تنها یال e حذف شده باشد بلکه دو انتهای آن یعنی w,v را هم بر هم منطبق کرده باشیم. (w,v را یک راس می گیریم و هر یالی که به یکی از این دو متصل می شد را به این راس متصل می کنیم)

دقت کنید با انجام این عمل روی یک گراف ساده، آن گراف به یک گراف چند گانه تبدیل خواهد شد (چرا؟) که در این صورت گاهی در گراف حاصل از انقباض اگر ساده بودن آن اهمیت داشته باشد یالهای چندگانه احتمالی بوجود آمده را یکی فرض می کنند.

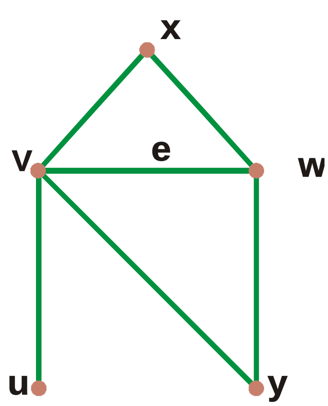
حال به نظر می آید این موضوع که $G\setminus e$ الزاماً زیر گراف G نمی باشد بدیهی تر به نظر بیاید. آیا شما می توانید در این زمینه مثالی بزنید؟

تعریف. انقباض از G یک گراف G' را انقباضی از G می نامیم اگر با انقباض متوالی یالهایی از G به وجود آمده باشد. واضح است اگر G' انقباضی از G باشد آنگاه $V(G')<V(G)$ و $E(G')<E(G)$

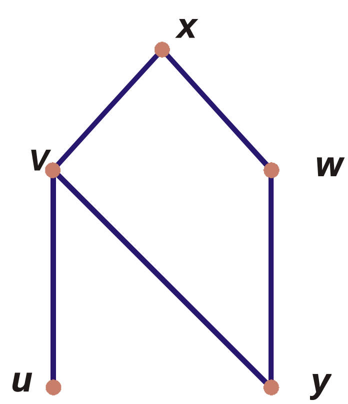
به عنوان نمونه K_5 انقباضی از گراف پترسن می باشد. زیرا کافی است در شکل زیر روی یالهای قرمز انقباض بزنید.



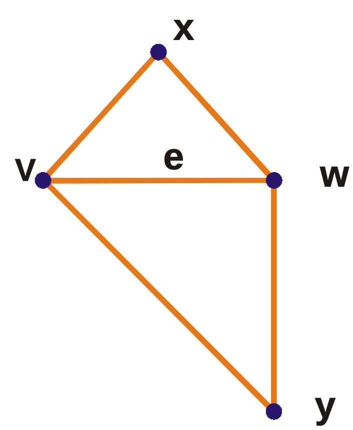
به مثالهایی از حذف و انقباض رئوس و یالها و تفاوت آنها توجه کنید.



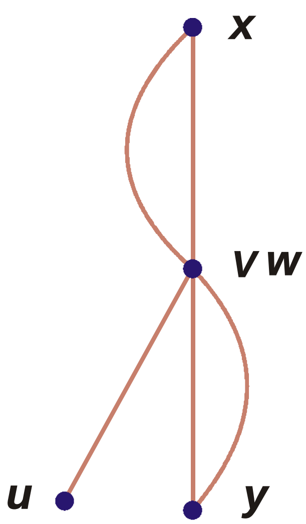
G



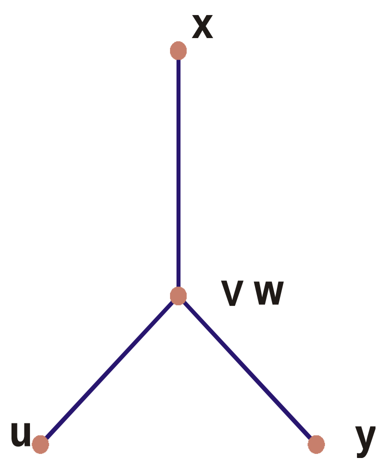
$G-e$



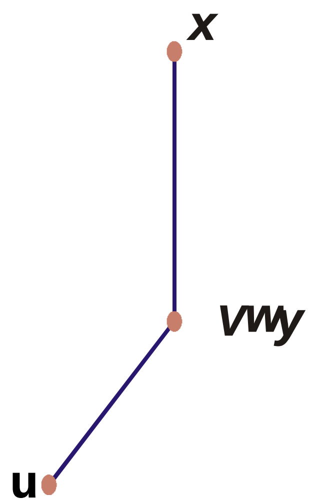
$G-u$



$G-e$ گراف چند گانه حاصل



$G \setminus e$ ساده شده گراف



$(G \setminus e)\setminus(vw)y$

گراف G^1 انقباض از G

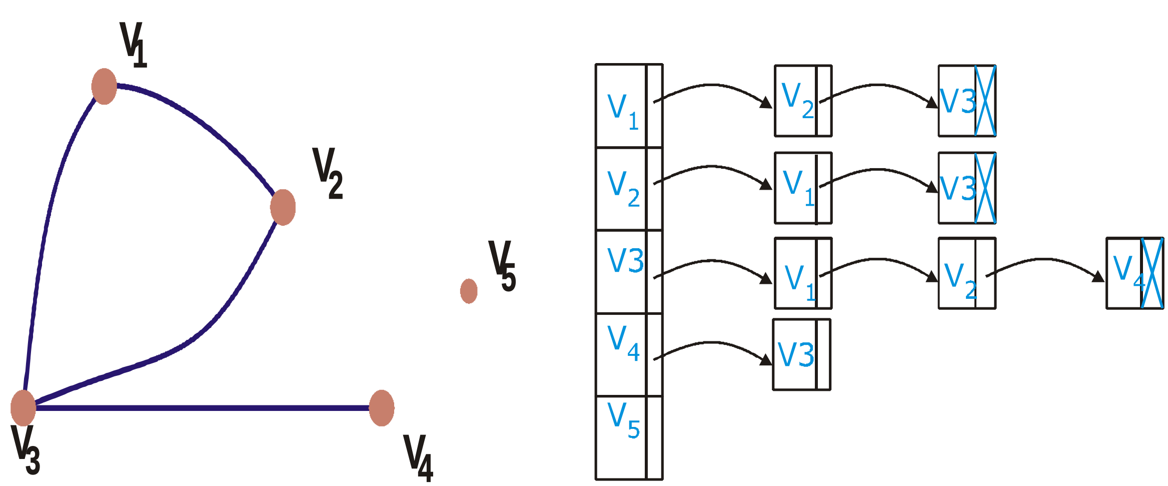
لیست مجاورت:

همانطور که ملاحظه فرمودید ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع هر دو علی رغم کـارائی خـود، خانـه های خالی بسیاری در ماتریس خود دارند و این علاوه بر اتلاف حافظه، موجب اتلاف زمان نیز خواهد گردیـد. به عنوان مثال یک گراف تهی 100 راسی ماتریس مجاورت 100×100 می خواهد که تمام خانـه هـای آن خالی هستند.

براساس ماتریس مجاورت، گراف را به روش دیگری که آن را لیست مجاورت می نامند و نیز نگه داری می کنند و آن عبارت از این است که لیستی از رئوس V_1 تا V_n داریم و در هر خانه این لیست اشاره گری بـه اولین همسایه آن خانه موجود می باشد. و از آنجا هم اشاره گری به دومین همسایه آن و الی آخر.

به عبارتی، به هر خانه لیست رئوس V_1 تا V_n، همسایه های آن در یک لیست پیوندی نسبت داده می شوند.

مثال.



به جزئیات ساخت لیست پیوندی و تعریف دقیق‌آن در مباحث مربوطه خواهیم پرداخت ولی فعلاً نیاز به آشنایی مقدماتی می باشد.

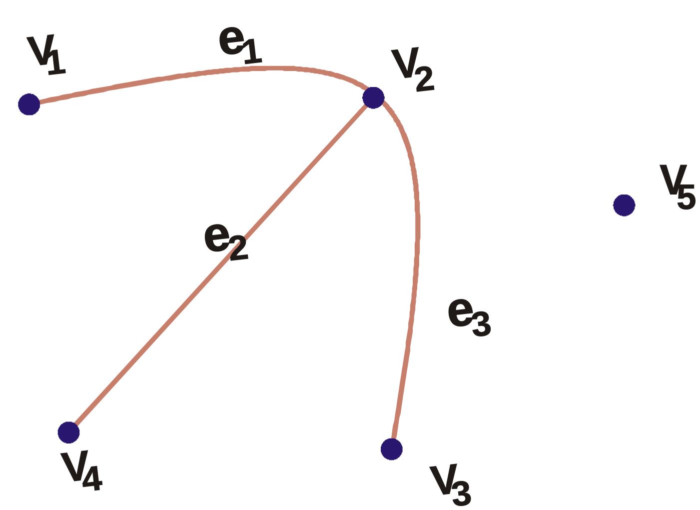
سوال. میزان حافظه مورد نیاز لیست وقوع را بدست آورید.

هر راس V_i در لیست های پیوندی به تعداد درجه خود ظاهر می شود زیرا زمانی در لیست می آید که همسایه راس دیگری باشد.

پس مجموع تعداد ظهور تمام رئوس برابر با مجموع کل درجات و این یعنی دو برابر تعداد یالها می باشد.

که بجز این تعداد به تعداد رئوس خانه هم برای نگه داری خانه های سر لیست های پیوندی لازم بوده پس جمعاً $|V|+2|E|$ خانه در حافظه مورد نیاز می باشد.

تمرین. ماتریس مجاورت، ماتریس وقوع و لیست مجاورت گراف زیر را بدست آورید.



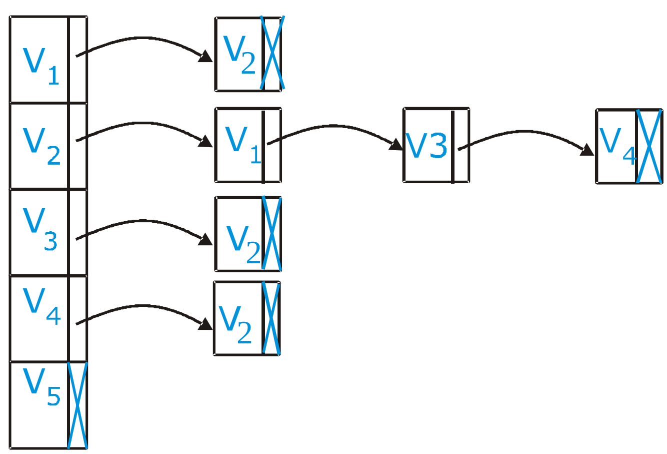
ماتریس مجاورت:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ماتریس وقوع:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

لیست مجاورت :



همبندی و مولفه های همبندی:

با مفهوم همبندی و برقراری ارتباط میان رئوسی آشنا شده ایم. حال به طور تخصصی تر بــه مباحــث مربوطه می پردازیم.

- یاد آوری می کنیم، گراف G را همبند می گوییم اگر به ازای هر دو راس v,u از آن مــسیری بین v,u موجود باشد.
- در یک گراف G، زیر گراف های همبند مجزای آن را مولفه های همبندی G می نامیم.

قضیه. نشان دهید که G همبند است، اگر و تنها اگر به ازای هر افراز V به دو مجموعه ناتهی v_2,v_1، یالی با یک انتها در v_1 و یک انتها در v_2 موجود باشد.

اثبات. نخست به برهان خلف ثابت می کنیم اگر به ازای دو مجموعه ناتهی v_2,v_1 یالی بـا یـک انتهـا در v_1 و یک انتها در v_2 موجود نباشد آنگاه گراف ناهمبند خواهد شد زیرا از رئوس v_1 هیچگاه نمی تـوان بــه رئوس v_2 رفت.

اما بالعکس باید ثابت کنیم اگر به ازای هر افراز v به v_2,v_1، یالی میان v_2,v_1 موجود باشد آنگاه گراف همبند است.

اگر به ازای هر افراز v_2,v_1 شرط برقرار باشد و $v=\{u_1,u_2,...,u_n\}$

آنگاه نخست فرض می کنیم $v_2=v-\{u_1\},v_1=\{u_1\}$ لذا u_1 به راسی مانند u_i متصل خواهد بو د

حال $v_1=\{u_1,u_i\}$ و $v_2=v-v_1$ را در نظر می گیریم، مانند قبل راسی مانند u_{i_2} به راسی از رئوس v_1 یال

دارد و چون v_1 یک دسته همبندی است u_{i2} هم به آن دسته اضافه می گردد. ملاحظه می گردد با ادامه این روش همواره v_1 یک دسته همبندی باقی مانده و بزرگتر می گردد تا آنجا که $v_1 = v$ گشته و این یعنی کـل گراف همبند است.

تمرین. ثابت کنید در گراف ساده G اگر $|E(G)| > \binom{|V|-1}{2}$ آنگاه G همبند است.

جواب. به راحتی اثبات می کنیم هر گراف ناهمبند، حداکثر $\binom{|V|-1}{2}$ یال دارد. زیـرا گــراف G اگــر ناهمبند باشد رئوس آن را می توان به دو دسته رئوس v_2, v_1 افراز کرد که یالی میان v_2, v_1 نباشد. اگر تعــداد رئوس v_1 را m و تعداد کل رئوس را $|V|$ بگیریم آنگاه داریم:

حداکثر تعداد یالهای G $=$ حداکثر تعداد یالهای $v_1 +$ حداکثر تعداد یالهای v_2

$$= \frac{(|V|-m)(|V|-m-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{|V^2| - 2m|V| - |V| + m^2 + \cancel{m} + m^2 - \cancel{m}}{2}$$

$$= \frac{|V^2| - 2|V|m + 2m^2 - |V|}{2} = \frac{|V|(|V|-1) + 2m^2 - 2|V|m}{2}$$

و چون $2m^2 - 2|V|m \geq 0$

$\Rightarrow$ حداکثر تعداد یالهای $G \leq \frac{|V|(|V|-1)}{2}$

پس اگر تعداد یالها از این تعداد بیشتر باشد آنگاه گراف همبند خواهد بود

قضیه. اگر $G(v_1, v_2)$ یک گراف دو بخشی باشد، طول هر مدار آن زوج است.

برهان. تمام رئوس متعلق به v_1 را سفید و تمام رئوس متعلق به v_2 را سیاه می کنیم.

هر دور آن را که به صورت $v_1v_2...v_mv_1$ در نظر بگیریم به قرینه فرض مـی کنـیم $v_1 \in V_1$ آنگـاه v_1 سفید بوده و در گام بعد الزاماً باید به رئوس V_2 برویم که سیاه می باشند و در گام بعد الزاماً باید به رئوس V_1 برگردیم که سفیدند و این حرکت های یک در میان سفید و سیاه را ادامه می دهیم تا به v_m برسیم که الزاماً سیاه است (چرا؟) پس تعداد کل سفیدها و سیاه ها برابر بوده و این یعنی تعداد رئوس مدار زوج بوده و یعنی طول آن زوج است: $m = 2k, k \in \mathbf{Z}$

قضیه. اگر G گراف ساده n راسی و دارای k مولفه همبندی باشد و $|E|$ تعداد یالهای آن باشد ثابت کنید.

$$n-k \le |E| \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

اولاً $|E| \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ زیرا در بدترین حالت تمام مولفه ها کامل هستند. حال فرض می‌کنیم G_j, G_i دو مولفه با n_j, n_i راسی باشند که $n_i \ge n_j$، با تغییر یک راس از G_j به G_i تعداد یالهـا در مجمـوع افزایش خواهد یافت زیرا

تفاوت تعداد یالها در حالت قدیم و جدید

$$=\left(\frac{n_i(n_i-1)}{2}+\frac{n_j(n_j-1)}{2}\right)-\left(\frac{(n_i+1)n_i}{2}+\frac{(n_j-1)(n_j-2)}{2}\right)=...=n_i-n_j+1>0$$

پس با ادامه این فرآیند، بیشترین تعداد یالهای ممکن زمانی خواهد بود که $k-1$ مولفه، یک راسـی و یک مولفه $n-k+1$ راسی باشد پس:

$$\left|E\right| \le \frac{1}{2}\left(n-k\right)\left(n-k+1\right)$$

برای اثبات $\left(n-k\right) \le \left|E\right|$ نخست باید لم زیر را ثابت کنیم:

لم1. در هر گراف همبند m راسی حداقل $\left(m-1\right)$ یال وجود خواهد داشت.

اثبات به استقرا. برای $m=1$ که بدیهی است.

فرض می کنیم برای $m=k$ گراف همبند k راسی لااقل $k-1$ یال داشته باشد.

برای $m=k+1$، اگر راس با درجه 1 وجود داشته باشد که آن را و یال مربوطه را حذف می کنیم برای k راس باقی مانده ،همبندی بر هم نمی خورد پس بنابر فرض لااقل $k-1$ یال دارند که با یال حذف شده کلاً k یال می شود.

و اگر راس با درجه 1 نداشته باشیم پس تمام رئوس درجه بزرگتر یا مساوی با 2 داشته پس

$$\text{تعداد یالها} = \frac{\text{مجموع درجات}}{2} \ge \frac{2\times\left(k+1\right)}{2} \ge k+1 > k$$

لذا حکم ثابت می باشد:

حال به اثبات قضیه می پردازیم،لم 1 به این صورت نیز می تواند تعبیر شود که در هر مولفه یالها حداقل یکی کمتر از راسها می باشند پس اگر k مولفه داشته باشیم جمعاً حداقل تعداد یالها $n-k$ خواهد شد که حکم ثابت می گردد.

قضیه. نشان دهید که در هر گراف همبند G، دو تا طولانیترین مسیر آن لااقل یک راس مشترک دارند.

اثبات. به برهان خلف

اگر دو مسیر $u_1u_2...u_n, v_1v_2...v_m$

دو طولانیترین مسیر G باشند که هیچ راس مشترکی ندارند آنگاه داریم:

چون گراف همبند است پس مسیری میان یکی از رئوس اولی مانند v_i به یکی از رئوس دومی مانند u_j وجود دارد که بجز u_i, v_i هیچ راسی از این دو مسیر در آن ظاهر نشده باشند و به قرینه فرض کنید $i > j$ باشد آنگاه

$v_1v_2v_3...,v_iv_{i+1}..v_m$

$u_1u_2..u_ju_{j+1}..u_n$

و مسیر بین u_j, v_i را $\overline{w}$ بنامیم.

مسیر $v_1v_2...v_i\overline{w}u_ju_{j+1}...u_n$ را در نظر بگیرید.

واضح است طول آن از $min(m,n)$ بزرگتر است و این یعنی دو مسیر اولی دو طولانیترین مسیرها نبودند و این یعنی تناقض.

- تعریف می کنیم فاصله رئوس v,u:

فاصله دو راس v,u را که با $d(u,v)$ نمایش می دهیم طول کوتاهترین مسیر موجود در میان آنها تعریف می کنیم و اگر u به v مسیر نداشت، $d(u,v)$ را برابر بی نهایت! می گیریم.

قضیه. به ازای هر سه راس $u,v,w \in V$ ثابت کنید:

$$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$$

واضح است زیرا به برهان اگر $d(u,w) > d(u,v) + d(v,w)$ آنگاه برای رفتن از u به w نخست بـا طول $d(u,v)$ به v رفته و سپس از آن با طول $d(v,w)$ به w می رویم پس جمعاً طول $d(u,v) + d(v,w)$ را پیموده ایم و این یعنی مسیر کوتاهتری یافته ایم. تناقض!

قضیه. ثابت کنید گراف G دو بخشی است اگر و تنها اگر دور فرد نداشته باشد.

اینکه تمام دورهای یک گراف دو بخشی زوج می باشد را قبلاً اثبات نموده ایم حال باید ثابت کنیم هر گراف که دور فرد نداشته باشد دو بخشی است.

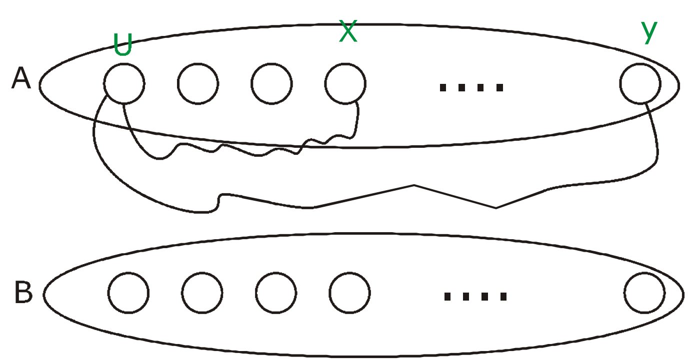
در هر مولفه آن یک راس مانند u را در نظر می گیریم و رئوس را به دو بخش زیر افراز می کنیم.

$$A = \left\{ v \in V \,\middle|\, d(u,v) \text{ زوج باشد} \right\}$$

$$B = \left\{ v \in V \,\middle|\, d(u,v) \text{ فرد باشد} \right\}$$

حال ثابت می کنیم هیچ یالی که هر دو سر آن متعلق به A یا هر دو سر آن متعلق به B باشد وجـود ندارد.

برهان خلف. اگر داشته باشیم $xy \in E$ که $y \in A, x \in A$



حال ثابت می کنیم دور فردی وجود دارد زیرا از u با مسیری به طول زوج $d(u,x)$ به x رفتـــه و از آن با یک یال به y رفته و دوباره از y با مسیری به طول زوج $d(y,u)$ به u باز می گردیم پس جمعاً فــرد خانه پیموده ایم و این خلف فرض سوال می باشد.

برای زمانی که y,x را عضو b نیز فرض کنیم مشابه بالا دور فرد وجود خواهد داشــت. پــس بخــش بندی داده شده معتبر بوده و گراف 2 بخشی می باشد.

تمرین. ثابت کنید هر راس v و هر یال e متعلق به یک گذر بسته، در لااقل یک دور از G نیز،ظــاهر می شوند.

تمرین. کمر G را طول کوتاهترین دور در G تعریف می کنیم. حداقل کمر و حداکثر کمر ممکن برای n راس چه می تواند باشد؟

قضیه. اگر $d \geq 2$ باشد ثابت کنید گراف لااقل یک دور دارد.

اثبات. به سادگی از یک راس دلخواه شروع می کنیم و به دلخــواه روی یکــی از یالهــای آن حرکــت می‌کنیم پس از آن به هر راس که رسیدیم، یکی از یالهای غیر تکراری آن را بر می گزینیم و راه خود را ادامه می دهیم چون هر راس لااقل 2 یال دارد پس تا زمانی که به یک راس تکراری نرسیم، ایــن الگــوریتم ادامــه خواهد داشت و چون کل یالها متناهی می باشد پس حتماً الگوریتم پایان خواهد پــذیرفت و یعنــی بــه راس تکراری می رسیم و این یعنی وجود یک گشت بسته و این هم یعنی وجود لااقل یک دور.

قضیه. اگر $d \geq 2$ باشد ثابت کنید دور آن لااقل طول $d+1$ دارد. (dکوچکترین درجه می باشد)

لم 1. بزرگترین مسیر گراف فوق لااقل طول d دارد.

اثبات به برهان خلف.

فرض کنیم بزرگترین مسیر آن $(m \le d)$ $v_1v_2....v_m$ باشد v_m را در نظر می گیریم، چون لااقل درجه آن d می باشد و تعداد رئوس این مسیر بجز خودش حداکثر $d-1$ می باشد پس به یک راس مانند v_{m+1} از رئوس دیگر متصل است که در این صورت مسیر $v_1v_2...v_mv_{m+1}$ مسیر طولانی تری خواهد بود و این یعنی تناقض

حال به اثبات باز می گردیم،در گراف داده شده بزرگترین مسیر آن را در نظر می گیریم و فرض می‌کنیم به صورت $u_1u_2...u_m$ باشد که ثابت کردیم $m \ge d+1$، حال راس u_1 را در نظر بگیرید، u_1 نمی‌تواند به راسی بجز رئوس این مسیر یال داشته باشد چون مسیر طولانیتری ساخته خواهد شد (چرا؟)

در داخل این رئوس نیز راسی مانند u_j که $j \ge d+1$ باشد وجود خواهد داشت که u_1 به آن متصل است (چرا؟) حال دنباله $u_1u_2...u_ju_i$ دور به طول $d+1$ خواهد بود.

یادآوری.

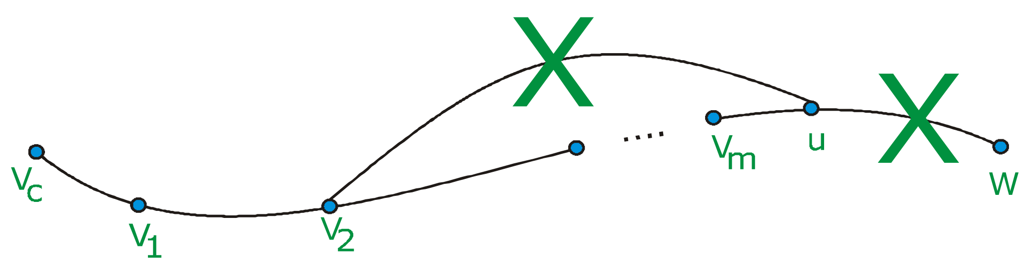
تا کنون در اثبات بعضی قضایا سعی می کردیم خصوصیتی را ماکسیمم یا مینیمم کرده و سپس درباره آن صحبت کنیم مانند اثبات اینکه در گراف G با $d \ge 2$ لااقل یک مسیر با طول بزرگتر از $d+1$ وجود دارد که بزرگترین مسیر آن را در نظر گرفته و روی آن بحث کردیم.

به این فن اثبات اکسترمال گیری می گویند، که با این فن در حقیقت، به فرضیات سوال، فرضیات دلخواهی را می افزاییم.

برای تسلط به این روش قضایای زیر را با هم اثبات می کنیم.

قضیه. فرض کنیم G گراف ساده با $|E|\geq 1$ باشد. اگر فرض کنیم G دوری نداشته باشد ثابت کنید G دارای یک راس از درجه **1** می باشد.

چون G ساده است،هر مسیر آن متناهی است و بین تمام مسیرها این بار نیز بزرگترین مـسیر آن را در نظر می گیریم. فرض کنیم u یکی از رئوس انتهایی آن باشد، چون این مسیر بزرگترین مسیر در G می باشد پس تمام همسایه های u باید در داخل مسیر باشند و گرنه مسیر بزرگتری بوجود خواهد آمد.



از طرفی u به هیچ یک از رئوس مسیر بجز راس قبلی آن نمی تواند یال داشته باشد چون دور بوجود می آید. پس u، الزاماً درجه 1 خواهد بود.

تمرین. گراف ساده G را در نظر بگیرید که دور ندارد. و دارای k مولفه همبندی که هر مولفه لااقل 2 راس دارد. می باشد.

ثابت کنید لااقل $2k$ راس درجه **1** دارد.

اثبات. در هر مولفه همبندی بزرگترین مسیر آن را در نظر می گیریم.

فرض می کنیم $v_1v_2...v_m$ باشد چون این مسیر بزرگترین مسیر می باشد نه v_1 نه v_m نمی توانند

به هیچ کدام از رئوس G بجز رئوس این مسیر متصل باشند از طرفی اگر به رئوس داخلــی ایــن مــسیر هــم متصل باشند دور بوجود می آید و این خلاف فرض است پس هر دو الزاماً درجه 1 می باشند. پس به ازای هــر مولفه لااقل 2 راس درجه 1 داریم پس جمعاً لااقل $2k$ راس درجه 1 خواهیم داشت.

- ایده اکسترمال گیری به همین سادگی می باشد و لیکن کاربردهای فراوانــی و شــکل هــای متفاوتی دارد که براساس ابداء خود شما می باشد گاهی روی مسیر ماکسیمم بحث می کنید گاهی روی زیر گراف ماکسیممی که خصوصیت X را داشته باشد یا دور ماکزیمم و یــا ... در ادامه مباحث به نمونه های بسیاری از این دست خواهیم خورد.
- به طور کلی سه روش استقرا، اکسترمال و برهان خلف پر کاربرد تــرین روشــهای اثبــات در مسائل گراف می باشند.

قضیه. هر گراف با n راس و k یال دارای حداقل $n-k$ مولفه است.

اثبات. فرض کنیم تعداد مولفه ها m باشد و تعداد یالها را هم با $|E|$ نمایش می دهــیم ثابــت کــرده بودیم:

$$|E| \geq n-m \quad (1)$$

حال به برهان خلف اگر $(n-k >$ تعداد مولفه ها $)$ باشد آنگاه:

$$m < n-|E|$$

$$\Rightarrow |E| < n-m \quad (2)$$

که 1 با 2 در تناقض می باشد لذا گراف حداقل $n-k$ مولفه دارد.