مثال ۷-۱

با فرض دو عدد دودویی $X = 1010100$ و $Y = 1000011$، تفریق‌های زیر را انجام دهید.

(الف) $Y - X$ **و (ب)** $X - Y$ **با استفاده از متمم 2**

(الف)

$$
\begin{aligned}
X &= 1010100 \\
&= + \text{متمم 2 عدد } Y \quad 0111101 \\
&= \text{حاصل جمع} \quad 10010001 \\
&= -\text{چشم‌پوشی از نقلی انتهایی } 2^7 \quad 10000000 \\
X - Y &= \text{جواب :} \quad 0010001
\end{aligned}
$$

(ب)

$$
\begin{aligned}
Y &= 1000011 \\
&= + \text{متمم 2 عدد } X \quad 0101100 \\
&= \text{حاصل جمع} \quad 1101111
\end{aligned}
$$

رقم نقلی انتهایی وجود ندارد.

بنابراین، جواب $Y - X$ = (متمم 2 عدد 1101111) − = −0010001 است. ❑

تفریق اعداد بی‌علامت را می‌توان با متمم $(r-1)$ نیز انجام داد. به خاطر دارید که متمم $(r-1)$، یک واحد کمتر از متمم r است. به این علت، نتیجه جمع مفروق منه با متمم مفروق حاصل جمعی تولید می‌کند که یکی کمتر از تفاضل صحیح به هنگام رخداد نقلی انتهایی است. حذف رقم نقلی انتهایی و افزودن 1 به حاصل جمع را رقم نقلی چرخشی می‌خوانند.

مثال ۸-۱

مثال ۷-۱ را با استفاده از متمم 1 انجام دهید.

(الف) $X - Y = 1010100 - 1000011$

$$
\begin{aligned}
X &= 1010100 \\
Y &= + \quad 0111100 \\
&= \text{حاصل جمع} \quad 10010000 \\
&= + \text{رقم نقلی انتهایی} \quad 1 \\
X - Y &= \text{جواب :} \quad 0010001
\end{aligned}
$$

(ب) $Y - X = 1000011 - 1010100$

$$
\begin{aligned}
Y &= 1000011 \\
X &= + \quad 0101011 \\
&= \text{حاصل جمع} \quad 1101110
\end{aligned}
$$

که رقم نقلی انتهایی وجود ندارد.

بنابراین جواب $X - Y$ = (متمم 1 عدد 1101110)− = −0010001 است. ❑

توجه کنید که نتیجه منفی با اخذ متمم 1 از حاصل جمع بدست آمده است زیرا این نوع متمم به کار رفت. روال رقم نقلی انتهایی چرخشی در تفریق اعداد دهدهی بی‌علامت با متمم 9 نیز قابل استفاده است.

۶-۱ اعداد دودویی علامت‌دار

اعداد صحیح مثبت و از آن جمله صفر را می‌توان با اعداد بی‌علامت نشان داد. با این وجود برای نمایش اعداد صحیح منفی به علامتی نیاز داریم. در حساب معمولی، یک عدد منفی را با یک علامت منها و عدد مثبت را با علامت بعلاوه نشان می‌دهند. به دلیل محدودیت در سخت‌افزار، کامپیوترها باید هر چیزی را با ارقام دودویی نشان دهند. مرسوم است که علامت را با یک بیت واقع در سمت چپ‌ترین مکان عدد نمایش دهند. معمولاً اعداد مثبت را با گذاشتن 0 و اعداد منفی را با گذاشتن 1 در محل بیت مزبور معرفی می‌نمایند.

لازم است بدانیم که هر دو گروه اعداد دودویی علامت‌دار و بی‌علامت هنگام ارائه به کامپیوتر از رشته بیت‌ها تشکیل شده‌اند. معمولاً کاربر علامت‌دار بودن یا نبودن عدد را معین می‌نماید. اگر عدد دودویی علامت‌دار باشد سمت چپ‌ترین بیت، علامت، و بقیه بیت‌ها عدد هستند. اگر عدد دودویی بدون علامت فرض شود، سمت چپ‌ترین بیت، باارزش‌ترین بیت عدد خواهد بود. مثلاً رشته بیت‌های 01001 می‌تواند به عنوان 9 (دودویی بی‌علامت) و یا 9+ (دودویی علامت‌دار) در نظر گرفته شود زیرا سمت چپ‌ترین بیت 0 است. رشته بیت‌های 11001 به عنوان 25 بی‌علامت و یا 9- علامت‌دار خواهد بود زیرا در سمت چپ‌ترین مکان عدد، رقم 1 وجود دارد که بیانگر منفی بودن عدد، و بقیه چهار بیت عدد 9 را نشان می‌دهد. معمولاً اگر نوع عدد از قبل مشخص باشد هیچگونه اشتباهی در تشخیص وجود نخواهد داشت.

نمایش اعداد علامت‌دار در آخرین مثال فوق، نمایش **مقدار- علامت‌دار** نامیده می‌شود. در این نام‌گذاری، عدد شامل مقدار و یک سمبل (+ یا -) یا یک بیت (0 یا 1) برای مشخص نمودن علامت است. این روش در محاسبات معمولی مورد استفاده می‌باشد. وقتی که عملیات حسابی در یک کامپیوتر پیاده‌سازی می‌شوند، بهتر است روش دیگری به نام سیستم متمم- علامت‌دار برای ارائه اعداد منفی به کار گرفته شود. در این سیستم، یک عدد منفی با متمم‌اش مشخص می‌شود. در حالی که سیستم مقدار- علامت، عدد را با تغییر علامتش منفی می‌کند، **سیستم متمم- علامت‌دار**، منفی عدد را با متمم‌سازی‌اش تهیه می‌نماید. چون اعداد مثبت همواره با 0 در سمت چپ‌شان شروع می‌شوند متمم همواره با 1 آغاز می‌گردد، که بیانگر عدد منفی خواهد بود. سیستم متمم- علامت‌دار می‌تواند از متمم 1 یا متمم 2 استفاده کند ولی متمم 2 رایج‌تر است.

به عنوان مثال فرض کنید که عدد 9 با هشت بیت در دودویی نشان داده شده باشد. 9+ با یک بیت 0 در سمت چپ‌ترین مکان و به دنبال آن معادل دودویی 9 می‌آید که نتیجه 00001001 خواهد بود. توجه داشته باشید که تمام هشت بیت باید مقدار داشته باشند، بنابراین پس از بیت علامت بقیه مکان‌ها تا اولین 1 از سمت چپ با 0 پر می‌شوند. هر چند که برای نمایش 9+ فقط یک راه وجود دارد، برای

نمایش 9- سه روش موجود است.

نمایش مقدار- علامت‌دار	10001001
نمایش متمم 1 _ علامت‌دار	11110110
نمایش متمم 2 _ علامت‌دار	11110111

در سیستم مقدار- علامت‌دار، با تغییر بیت علامت در سمت چپ‌ترین مکان، از 0 به 1 ، عدد 9- به 9+ تبدیل می‌شود. در متمم 1 _ علامت‌دار، 9- را با متمم کردن همه بیت‌های 9+ ، از جمله بیت علامت بدست می‌آوریم. در متمم 2 _ علامت‌دار، 9- با متمم 2کردن تمام بیت‌های عدد مثبت از جمله بیت علامت حاصل می‌شود.

جدول ۳-۱ همه اعداد دودویی 4 بیت را به هر سه فرم نمایش، نشان می‌دهد. عدد دهدهی معادل نیز به منظور وجود مرجع آورده شده است. توجه کنید که اعداد مثبت در هر سه نمایش یکسانند و دارای یک 0 در سمت چپ‌ترین مکان می‌باشند. سیستم متمم 2_ علامت‌دار تنها یک نمایش برای 0 دارد که همیشه مثبت است. دو سیستم دیگر دارای 0 مثبت و 0 منفی‌اند، چیزی که در محاسبات معمولی با آن مواجه نمی‌شویم. مجدداً توجه کنید که همه اعداد منفی دارای 1 در سمت چپ‌ترین بیت‌اند. به این ترتیب ما آنها را از اعداد مثبت تفکیک می‌نماییم. با چهار بیت قادریم 16 عدد دودویی را نشان دهیم. در سیستم مقدار- علامت‌دار و متمم 1 ، هشت عدد مثبت و هشت عدد منفی و از جمله دو عدد صفر وجود دارد. در نمایش متمم 2 ، هشت عدد مثبت از جمله صفر و هشت عدد منفی موجود است.

سیستم مقدار- علامت‌دار در حساب معمولی مورد استفاده است و هنگامی که در کامپیوتر به کار

جدول ۳-۱ . اعداد دودویی علامت‌دار

دهدهی	متمم 2 - علامت دار	متمم 1 - علامت دار	مقدار - علامت دار
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
−0	—	1111	1000
−1	1111	1110	1001
−2	1110	1101	1010
−3	1101	1100	1011
−4	1100	1011	1100
−5	1011	1010	1101
−6	1010	1001	1110
−7	1001	1000	1111
−8	1000	—	—

رود، مشکلاتی به همراه دارد زیرا باید علامت و مقدار به طور جداگانه دستکاری شوند. بنابراین، معمولاً متمم- علامت به کار گرفته می‌شود. متمم 1 نیز مشکلاتی را به بار می‌آورد و به ندرت در محاسبات به کار می‌رود. متمم 1 برای اعمال منطقی مفید است چون تبدیل 0 به 1 و یا 1 به 0 معادل با عمل متمم منطقی است. این مطلب در فصل بعدی نشان داده خواهد شد. بحث زیر در مورد محاسبات دودویی علامت‌دار، اختصاصاً به نمایش اعداد منفی متمم 2_ علامت‌دار تعلق دارد. روال‌های مشابهی قابل اعمال به سیستم متمم 1_ علامت‌دار بوده و در آن رقم نقلی چرخشی همچون اعداد بدون علامت به حساب خواهد آمد.

جمع حسابی

جمع دو عدد در سیستم مقدار- علامت از قوانین معمول در حساب تبعیت می‌نماید. اگر علامت‌ها یکسان باشند دو مقدار را با هم جمع کرده و به حاصل جمع علامت مشترک را تخصیص می‌دهیم. اگر علامت‌ها یکی نباشند، مقدار کوچکتر را از بزرگتر کم می‌کنیم و به نتیجه حاصل علامت عدد بزرگتر را اختصاص می‌دهیم. مثلاً $-12 = -(37 - 25) = (-37) + (+25)$ است، که با تفریق مقدار کوچکتر 25 از مقدار بزرگتر 37 و استفاده از علامت 37 برای علامت نتیجه انجام شده است. این فرآیند به مقایسه علامت‌ها و اندازه‌ها و سپس اجرای جمع و تفریق نیاز دارد. روال مشابهی در نمایش مقدار- علامت برای اعداد دودویی قابل اعمال است. برعکس قوانین جمع اعداد در سیستم مقدار- علامت نیازی به مقایسه و تفریق ندارد، بلکه فقط باید آنها را جمع کرد. روال بسیار ساده بوده و برای اعداد دودویی به صورت زیر بیان می‌گردد:

جمع دو عدد دودویی علامت‌دار با اعداد منفی که به فرم متمم 2 نمایش داده شده‌اند از جمع دو عدد از جمله بیت‌های علامت حاصل می‌شود. رقم نقلی حاصل از بیت علامت چشم‌پوشی می‌گردد. مثال‌های عددی برای جمع در زیر آمده است.

+ 6	00000110	− 6	11111010
+13	00001101	+13	00001101
+19	00010011	+ 7	00000111
+ 6	00000110	−6	11111010
−13	11110011	−13	11110011
− 7	11111001	−19	11101101

توجه کنید که اعداد منفی باید از ابتدا به صورت متمم 2 باشند و حاصل جمع اگر منفی باشد به صورت متمم 2 خواهد بود.

در هر یک از چهار حالت فوق، عمل انجام شده جمعی است که در آن بیت علامت هم لحاظ شده است. در این روش هر رقم نقلی خروجی نادیده گرفته می‌شود و نتایج منفی به فرم متمم 2 هستند.

برای یافتن یک جواب صحیح، باید مطمئن باشیم که برای جای دادن نتیجه، تعداد کافی بیت وجود

دارد. اگر با دو عدد n بیت شروع کنیم و حاصل جمع n+1 بیت را اشغال کند گوییم سرریز رخ داده است. هنگامی که جمع با کاغذ و قلم انجام می‌شود سرریز مسئله‌ای نیست زیرا ما از نظر عرض صفحه محدودیت نداریم. در این گونه موارد فقط یک 0 به بالاترین مکان عدد مثبت و یا یک 1 به بالاترین مکان عدد منفی می‌افزاییم تا آنها را به n+1 بیت گسترش دهیم و سپس جمع را اجرا نماییم. ولی سرریز در کامپیوتر مشکل‌ساز است زیرا تعداد بیت‌هایی که عدد را نگه می‌دارند محدود می‌باشد، و نتیجه‌ای که از مقدار نهایی به میزان 1 واحد تجاوز کند را نمی‌توان در آن جای داد.

فرم متمم اعداد منفی برای کسانی که به سیستم مقدار- علامت عادت کرده‌اند، ناآشناست. برای تعیین یک عدد منفی وقتی که به فرم متمم 2 علامت‌دار باشد، لازم است که آن را به یک عدد مثبت تبدیل کنیم تا به شکل آشناتری در آید. مثلاً عدد دودویی علامت‌دار 11111001 یک عدد منفی است زیرا سمت چپ‌ترین بیت برابر 1 است. متمم 2 آن 00000111 می‌باشد که معادل دودویی عدد 7+ است. به این ترتیب تشخیص می‌دهیم که عدد منفی اولیه برابر 7− بوده است.

تفریق حسابی

تفریق دو عدد دودویی علامت‌دار، وقتی که اعداد منفی به صورت متمم 2 باشند بسیار ساده است و می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

متمم 2 مفروق (از جمله بیت علامت) را بدست آورید و آن را به مفروق منه (از جمله بیت علامت) اضافه کنید. رقم نقلی خروجی از مکان بیت علامت چشم‌پوشی شود.

این پدیده به این علت رخ می‌دهد که اگر علامت مفروق عوض شود، تفریق به جمع تبدیل خواهد شد. این نکته با روابط زیر نشان داده شده است:

$$(\pm A) - (+B) = (\pm A) + (-B);$$
$$(\pm A) - (-B) = (\pm A) + (+B).$$

اما تغییر یک عدد مثبت به یک عدد منفی به سادگی با بدست آوردن متمم 2 آن امکان‌پذیر است. عکس مطلب فوق نیز صحیح می‌باشد زیرا متمم یک عدد منفی متمم، یک عدد مثبت معادل تولید می‌نماید. تفریق 7+ = (13−) − (6−) را در نظر بگیرید. در دودویی با هشت بیت، این تفریق به صورت (11111010 − 11110011) است. با یافتن متمم 2 مفروق (13−)، یعنی (13+)، تفریق به فرم جمع در می‌آید. در دودویی این عمل به صورت 100000111 = 00001101 + 11111010 می‌باشد. با حذف رقم نقلی انتهایی پاسخ صحیح 00000111 (7+) خواهد بود.

لازم به تذکر است که جمع و تفریق اعداد دودویی در سیستم متمم- علامت مشابه با قوانین جمع و تفریق معمولی است. بنابراین کامپیوترها دارای سخت‌افزار مشترک برای هر دو نوع عمل حسابی می‌باشند. کاربر یا برنامه‌نویس باید نتایج چنین جمع یا تفریقی را به طور متفاوت تفسیر کند و این تفسیر به فرض اولیه وی یعنی علامت‌دار بودن یا بی‌علامت بودن اعداد بستگی دارد.

۱-۷ کدهای دودویی

سیستم‌های دیجیتال از سیگنال‌هایی که دو مقدار مجزا و عناصری از مدار که دو حالت با ثبات دارند استفاده می‌کنند. بین سیگنال‌های دودویی، عناصر مدار دودویی و ارقام دودویی رابطه مستقیمی وجود دارد. مثلاً یک عدد دودویی n رقمی را می‌توان با n عنصر مدار دودویی که هر یک دارای یک سیگنال خروجی معادل 0 یا 1 اند، نشان داد. سیستم‌های دیجیتال نه تنها اعداد دودویی بلکه بسیاری از اجزاء گسسته اطلاعات را هم دستکاری و نمایش می‌دهند و روی آنها عمل می‌کنند. هر عنصر گسسته اطلاعاتی را در میان یک گروه از مقادیر می‌توان با استفاده از کد دودویی نشان داد. کدها باید به صورت دودویی باشند زیرا کامپیوترها فقط قادرند 1ها و 0ها را نگه دارند. با ید توجه داشت که کدها فقط نماد یا سمبل نمایش اطلاعات را عوض می‌کنند و نه مفهوم آنها را. اگر بیت‌های یک کامپیوتر را به طور تصادفی مورد بررسی قرار دهیم، ملاحظه خواهیم کرد که اغلب به جای اعداد دودویی، اطلاعات کد شده در آنها وجود دارد.

یک کد دودویی n بیت، گروهی متشکل از n بیت است که 2^n ترکیب ممکن از 1ها و 0ها را داراست، و هر ترکیب یک عنصر از مجموعه کد شده را نمایش می‌دهد. یک مجموعه چهار عنصری با دو بیت کد می‌شود، که به هر عنصر یکی از ترکیبات بیتی زیر تخصیص می‌یابد: 00، 01، 10، 11. یک مجموعه هشت عضوی به کد 3 بیت نیاز دارد و برای یک مجموعه 16 عنصری یک کد 4 بیت لازم است. ترکیب بیتی یک کد n بیتی با شمارش دودویی از 0 تا 2^n-1 حاصل می‌گردد. به هر عنصر باید یک ترکیب بیتی دودویی منحصر به فرد اختصاص یابد و هیچ دو عنصر دارای مقدار یکسانی نمی‌باشند؛ در غیر این صورت تخصیص کد گنگ و بی‌معنی خواهد بود.

گرچه حداقل تعداد بیت‌های لازم برای 2^n کد مجزا، برابر n است، حداکثر تعداد بیت‌ها برای تعریف یک کد دودویی وجود ندارد. مثلاً 10 رقم دهدهی با 10 بیت قابل کد شدن است، و هر رقم دهدهی به یکی از ترکیبات نُه 0 و یک 1 تخصیص می‌یابد. در این کد دهدهی، رقم 6 به ترکیب بیتی 0001000000 اختصاص می‌یابد.

کد BCD

گرچه سیستم اعداد دودویی طبیعی‌ترین سیستم برای یک کامپیوتر است، ولی بسیاری از مردم به سیستم دهدهی عادت دارند. یکی از راه‌های حل این مشکل تبدیل اعداد دهدهی به دودویی، اجرای همه محاسبات به دودویی و سپس تبدیل نتایج دودویی به دهدهی است. این روش لازم می‌دارد تا اعداد دهدهی را در کامپیوتر ذخیره کنیم تا بتوانند به دودویی تبدیل شوند. چون کامپیوتر فقط می‌تواند مقادیر دودویی را قبول کند، باید ارقام دهدهی را با کدی مرکب از 1ها و 0ها نشان دهیم. هنگامی که این ارقام به فرم کد شده در کامپیوتر ذخیره شوند، می‌توان مستقیماً عملیات حسابی را روی این اعداد دهدهی اجرا نمود.

اگر تعداد عناصر در مجموعه به صورت توانی از 2 نباشد، کد دودویی دارای ترکیبات بیتی تخصیص نیافته خواهد بود. 10 رقم دهدهی چنین مجموعه‌ای را می‌سازند. یک کد دودویی که بتواند 10 عنصر را

جدول ۴-۱ . دهدهی کد شده به دودویی (BCD)

سمبل دهدهی	رقم BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

از هم تفکیک کند باید حداقل 4 بیت داشته باشد، ولی 6 ترکیب از 16 ترکیب ممکن تخصیص نیافته باقی می‌ماند. با مقداردهی 10گانه به 4 بیت می‌توان کدهای دودویی متفاوتی بدست آورد. کدی که برای ارقام دهدهی معمولاً به‌کار می‌رود در جدول ۴-۱ دیده می‌شود. این کد را دهدهی کد شده به دودویی می‌خوانند و به طور خلاصه آن را با BCD نمایش می‌دهند. چند کد دهدهی دیگر بعداً در این بخش نمایش داده خواهند شد.

جدول ۴-۱ هر کد 4 بیتی را به یک رقم دهدهی نسبت می‌دهد. یک عدد k رقمی در BCD به 4k بیت نیاز دارد. عدد دهدهی 396 در BCD با 12 بیت به صورت 0110 1001 0011 نمایش داده می‌شود، که در آن هر گروه 4 بیتی یک رقم دهدهی را نشان می‌دهد. هرگاه عدد دهدهی در BCD بین 0 تا 9 باشد با عدد دودویی‌اش معادل است. یک عدد BCD بزرگتر از 10 با عدد دودویی معادلش، هر چند که از 0ها و 1ها تشکیل شده، متفاوت است. به علاوه ترکیبات دودویی 1010 تا 1111 به‌کار نرفته‌اند و در BCD مفهومی ندارند. عدد دهدهی 185 و مقدار مربوطه آن را در BCD و دودویی ملاحظه کنید:

$$(185)_{10} = (0001\ 1000\ 0101)_{BCD} = (10111001)_2$$

مقدار BCD دارای 12 بیت است، ولی عدد دودویی معادل آنها تنها 8 بیت لازم دارد. واضح است یک عدد BCD نسبت به مقدار دودویی به بیت‌های بیشتری احتیاج دارد. با این وجود، استفاده از اعداد دهدهی دارای مزیت است زیرا داده‌های ورودی و خروجی به وسیله انسان‌هایی که سیستم‌های دهدهی را به‌کار می‌برند تولید می‌شود.

توجه داشته باشید که اعداد BCD اعداد دهدهی هستند و نه اعداد دودودویی، هر چند که آنها در ساختارشان از بیت‌ها استفاده می‌کنند. تنها تفاوت بین یک عدد دهدهی و BCD این است که اعداد دهدهی سمبل‌های 0، 1، 2، ...، 9 و اعداد BCD سمبل‌های 0000، 0001، 0010، ...، 1001 را به‌کار می‌برند. مقدار دهدهی دقیقاً یکی است. عدد 10 دهدهی در BCD با هشت بیت 0000 0001 و عدد 15 با 0101 0001 نمایش داده می‌شوند. مقادیر دودویی معادل آنها به ترتیب 1010 و 1111 است که تنها چهار بیت دارند.

جمع BCD

جمع دو رقم دهدهی در BCD، همراه با رقم نقلی احتمالی از جفت رقم کم‌ارزش‌تر قبلی را در نظر بگیرید. چون هر رقم از 9 تجاوز نمی‌کند، جمع نمی‌تواند بزرگتر از 19 = 1 + 9 + 9 باشد که در آن 1، رقم نقلی قبلی است. فرض کنید می‌خواهیم ارقام BCD را به شکل اعداد دودویی با هم جمع کنیم. جمع دودویی، نتیجه‌ای بین 0 تا 19 را تولید خواهد کرد. این مقادیر به دودویی برابرند با 0000 تا 10011، ولی به فرم BCD برابر با 0000 تا 1001 1 می‌باشند. اولین رقم، رقم نقلی و چهار بیت بعدی رقم جمع BCD است. وقتی حاصل جمع دودویی برابر یا کم‌تر از 1001 است (بدون نقلی)، رقم BCD مربوطه صحیح است. با این وجود، وقتی جمع دودویی بزرگتر یا مساوی 1010 باشد، نتیجه یک رقم BCD نامعتبر است. جمع $6 = (0110)_2$ با حاصل جمع دودویی، آن را به رقم صحیح بدل کرده و در صورت لزوم رقم نقلی نیز تولید خواهد کرد. دلیل این است که اختلاف بین یک رقم نقلی در باارزش‌ترین مکان بیتی حاصل از جمع دودویی و نقلی دهدهی برابر است با $16 - 10 = 6$. جمع BCD زیر را در نظر بگیرید:

4	0100	4	0100	8	1000
+5	+0101	+8	+1000	+9	1001
9	1001	12	1100	17	10001
			+0110		+0110
			10010		10111

در هر حالت دو رقم BCD و نیز فرم دودویی آنها با هم جمع می‌شوند. اگر جمع دودویی بزرگتر یا برابر 1010 باشد، به آن 0110 را می‌افزاییم تا رقم BCD حاصل جمع و نقلی صحیح حاصل شود. در مثال اول حاصل جمع برابر 9 می‌باشد که یک رقم حاصل جمع BCD صحیح است. در مثال دوم، جمع دودویی یک رقم BCD نامعتبر تولید می‌کند. افزایش 0110 به آن رقم حاصل جمع BCD صحیح 0010 (2) را همراه با یک رقم نقلی به وجود می‌آورد. در مثال سوم، جمع دودویی یک رقم نقلی خواهد داشت. این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که حاصل جمع مساوی یا بزرگتر از 16 باشد. گرچه چهار بیت دیگر کمتر از 1001 است، حاصل جمع نیاز به اصلاح دارد زیرا دارای رقم نقلی است. با جمع 0110 رقم حاصل جمع BCD 0111 (7) و یک نقلی BCD حاصل می‌گردد.

جمع دو عدد BCD بی‌علامت n رقمی روال مشابهی دارد. جمع $760 = 576 + 184$ را به BCD در نظر بگیرید:

BCD carry	1	1		
	0001	1000	0100	184
	+0101	0111	0110	+576
Binary sum	0111	10000	1010	
Add 6		0110	0110	
BCD sum	0111	0110	0000	760

اولین جفت رقم BCD کم‌ارزش‌تر، یک رقم BCD برابر با 0000 و یک رقم نقلی برای جفت رقم بعدی را

تولید می‌کند. جفت رقم دوم بعلاوه نقلی قبلی حاصل جمع 0110 و یک رقم نقلی برای جفت رقم بعدی را به وجود می‌آورد. جفت رقم سوم بعلاوه یک رقم نقلی حاصل جمع دودویی 0111 را تولید کرده و نیاز به اصلاح ندارد.

حساب دهدهی

نمایش اعداد دهدهی علامت‌دار در BCD مشابه اعداد علامت‌دار در دودویی است. ما می‌توانیم از هر یک از هر دو سیستم مقدار- علامت‌دار یا متمم- علامت‌دار استفاده کنیم. علامت یک عدد دهدهی معمولاً با چهار بیت نمایش داده می‌شود تا با کد 4 بیت ارقام دهدهی همسان باشد. معمولاً علامت مثبت با چهار 0 و علامت منها با 9 BCD یعنی 1001 نشان داده می‌شود.

سیستم مقدار- علامت‌دار به ندرت در کامپیوترها به کار می‌رود. این سیستم می‌تواند متمم 9 یا متمم 10 باشد، ولی اغلب متمم 10 به کار گرفته می‌شود. برای بدست آوردن متمم 10 یک عدد BCD، ابتدا متمم 9 را بدست اورده و به کم‌ارزش‌ترین رقم 1 واحد می‌افزاییم. متمم 9 نیز با کسر هر رقم از 9 حاصل می‌گردد.

روالی که در بخش قبل برای سیستم متمم 2 علامت‌دار بنا نهاده شد به سیستم متمم 10 علامت‌دار در اعداد دهدهی نیز قابل اعمال است. جمع با افزودن همه ارقام، از جمله رقم علامت و چشم‌پوشی از رقم نقلی انتهایی انجام می‌شود. در اینجا فرض می‌شود که همه اعداد منفی به فرم متمم 10 باشند. جمع +135 = (-240) + (+375) را در نظر بگیرید که در سیستم متمم علامت‌دار انجام شده است.

```
 0 375
+9 760
 0 135
```

عدد 9 واقع در سمت چپ‌ترین مکان عدد دوم نمایشگر یک علامت منفی و 9760 متمم 10 عدد 0240 است. برای بدست آوردن 135+ ، دو عدد با هم جمع و رقم نقلی نادیده گرفته می‌شود. البته اعداد دهدهی داخل کامپیوتر، از جمله ارقام علامت باید به BCD باشند. همانطور که قبلاً اشاره شد جمع با ارقام BCD انجام می‌شود.

تفریق اعداد دهدهی اعم از علامت‌دار یا بی‌علامت در سیستم متمم 10 مشابه با حالت دودویی است. متمم 10 مفروق را بدست آورید و آن را به مفروق منه اضافه کنید. بسیاری از کامپیوترها برای انجام محاسبات حسابی اعداد دهدهی در BCD، سخت‌افزار خاصی دارند. کاربر کامپیوتر می‌تواند برای انجام عمل حسابی با اعداد دهدهی، بدون نیاز به تبدیل آنها، به دودویی برنامه‌نویسی کند.

دیگر کدهای دهدهی

کدهای دودویی برای ارقام دهدهی به حداقل چهار بیت در قبال هر رقم نیاز دارند. با ایجاد 10 ترکیب مختلف در چهار بیت کدهای مختلف را می‌توان ایجاد کرد. کدهای BCD و سه نوع کد دیگر در جدول۵-۱ نشان داده شده‌اند. هر کد تنها 10 ترکیب بیتی از 16 ترکیب ممکن را در چهار بیت به کار

جدول ۵-۱. چهار کد دودویی متفاوت برای ارقام دهدهی

رقم دهدهی	BCD 8421	2421	افزونی 3	8 4-2-1
0	0000	0000	0011	0 0 0 0
1	0001	0001	0100	0 1 1 1
2	0010	0010	0101	0 1 1 0
3	0011	0011	0110	0 1 0 1
4	0100	0100	0111	0 1 0 0
5	0101	1011	1000	1 0 1 1
6	0110	1100	1001	1 0 1 0
7	0111	1101	1010	1 0 0 1
8	1000	1110	1011	1 0 0 0
9	1001	1111	1100	1 1 1 1
ترکیبات بیتی بکارنرفته	1010	0101	0000	0 0 0 1
	1011	0110	0001	0 0 1 0
	1100	0111	0010	0 0 1 1
	1101	1000	1101	1 1 0 0
	1110	1001	1110	1 1 0 1
	1111	1010	1111	1 1 1 0

می‌برد. شش ترکیبی که در هر حال به کار نروند دارای مفهوم نیستند و باید از آنها اجتناب کرد.

کدهای BCD و 2421 از جمله کدهای وزین هستند. در یک کد وزین به هر مکان از بیت وزنی تخصیص داده شده است به نحوی که هر رقم با جمع اوزان تمام 1ها در ترکیب کد بدست می‌آید. کد BCD دارای وزن‌های 8، 4، 2، 1 است که مربوط به توازنی از دو برای هر بیت است. مثلاً تخصیص بیتی 0110 با توجه به وزن 1ها برای 6 تفسیر می‌شود زیرا $8 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 0 = 6$. ترکیب بیتی 1101 وقتی با کد 2421 وزین شود معادل دهدهی $2 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 7$ را خواهد داد. توجه کنید که در کد 2421 بعضی از ارقام به دو طریق کدگذاری می‌شوند. عدد 4 دهدهی به ترکیب‌های بیتی 0100 یا 1010 متعلق است زیرا هر دو ترکیب عدد 4 را نشان می‌دهند.

کدهای 2421 و افزونی 3- مثال‌هایی از کدهای خود متمم هستند. این کدها خواصی دارند که با توجه به آن متمم 9 عدد دهدهی مستقیماً از تغییر 0ها به 1 و 1ها به 0 در کد حاصل می‌شود. مثلاً عدد دهدهی 395 در افزونی 3- به صورت 1000 1100 0110 می‌باشد. متمم 9 آن یعنی 604 به صورت 0111 0011 1001 می‌باشد که در واقع با متمم هر بیت از کد بدست می‌آید (مثل متمم 1 عدد دودویی).

کد افزونی 3- به دلیل خود متممی‌اش در کامپیوترهای قدیمی به کار می‌رفت. این کد بی‌وزن است و هر ترکیب کدی در آن از جمع مقدار دودویی متناظرش با 3 حاصل می‌شود. توجه داشته باشید که کد BCD خود متمم نیست.

کد 8، 4، 2- و 1- مثالی از تخصیص هر دو نوع وزن مثبت و منفی به یک کد دهدهی است. در این حال، ترکیب بیتی 0110 برای 2 دهدهی تخصیص یافته و از رابطه $8\times0+4\times1+(-2)\times1+(-1)\times0=2$ محاسبه می‌شود.

کدگری

خروجی داده بسیاری از سیستم‌های فیزیکی کمیت‌های پیوسته را فراهم می‌کنند. این داده‌ها باید قبل از اعمال به یک سیستم دیجیتال، به فرم دیجیتال تبدیل شوند. اطلاعات پیوسته یا آنالوگ با وسیله‌ای به نام مبدل آنالوگ به دیجیتال به فرم دیجیتال در می‌آیند. گاهی بهتر است برای نمایش داده دیجیتال از کد گری در جدول ۶-۱ استفاده شود. مزیت کد گری نسبت به کد دودویی این است که وقتی از یک کد به کد دیگری می‌رویم تنها یک بیت تغییر می‌یابد. مثلاً در رفتن از 7 به 8، کد گری از 0100 به 1100 تغییر می‌کند. دیده می‌شود که تنها بیت اول سمت چپ از 0 به 1 عوض شده است و سه بیت دیگر ثابت باقی می‌مانند. هنگامی که این کد را با کد دودویی مقایسه نماییم، تغییر از 7 به 8، به صورت 0111 به 1000 خواهد بود و ملاحظه می‌گردد که هر چهار بیت تغییر مقدار داده‌اند.

کد گری در کاربردهایی مورد استفاده است که رشته معمول اعداد دودویی ممکن است در طول انتقال یا تبدیل از یک عدد به دیگری خطایی تولید کنند. اگر اعداد دودویی استفاده شوند، تغییر از 0111 به 1000 ممکن است در صورت تغییر طولانی‌تر سمت راست‌ترین بیت، عدد میانی 1001 را تولید کند که خطاست. کد گری این نوع خطا را حذف می‌کند زیرا تنها یک بیت تغییر در حین انتقال بین دو عدد وجود دارد.

نوعی کاربرد کد گری به هنگام نمایش داده آنالوگ ناشی از تغییرات پیوسته مکان یک شفت موتور می‌باشد. شفت به قطعات تقسیم می‌گردد و به هر قطعه یک عدد تخصیص می‌یابد. اگر قطعات مجاور منطبق با رشته کد گری باشد، ابهام به هنگام تشخیص خطای ناشی از جدایی دو قطعه حذف می‌گردد.

جدول ۶-۱. کد گری 4 بیتی

معادل دهدهی	کد گری
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000