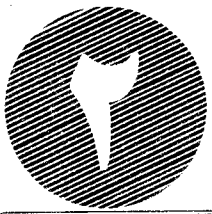


جبر بول و گیت‌های منطقی

۲-۱ تعاریف اولیه

جبر بول را می‌توان مانند هر سیستم منتجه ریاضی، به وسیله مجموعه‌ای از عناصر، یک مجموعه از الگوها و تعدادی اصول اثبات نشده یا بدیهیات تعریف نمود. یک مجموعه از عناصر کلکسیونی از اشیاء است که دارای خواص مشترکی باشند. اگر S یک مجموعه و x و y عناصر مشخصی از آن باشند، آنگاه $x \in S$ به این معنی است که x عضوی از مجموعه S و $y \notin S$ یعنی y عضوی از S نیست. یک مجموعه با تعداد قابل شمارشی از عناصر با یک جفت آکولاد مشخص می‌شود: $A = \{1, 2, 3, 4\}$، یعنی عناصر مجموعه A عبارتند از 1 ,2 ,3 و 4. یک عملگر دودویی روی یک مجموعه از عناصر، S، قانونی است که به هر جفت از عناصر S، یک عنصر منحصر به فرد از S را تخصیص دهد. به عنوان مثال رابطه $a * b = c$ را در نظر بگیرید. (*) را یک عملگر دودویی می‌خوانیم به شرطی که بتواند عنصر c را به جفت عنصر a و b منتسب نماید ضمن اینکه رابطه $a, b, c \in s$ معتبر باشد. با این وجود اگر $a, b \in S$ و $c \notin S$ باشد، (*) یک عملگر دودویی نیست.

اصول یک سیستم ریاضی، فرضیات اولیه را تشکیل می‌دهند که با استفاده از آنها می‌توان قوانین و تئوری‌ها و خواص سیستم را نتیجه گرفت. مهمترین اصول بکار رفته در فرموله کردن ساختارهای جبری عبارتند از:

۱- بسته بودن : یک مجموعه S نسبت به عملگر دودویی بسته است به شرطی که برای هر جفت عنصر از S، این عملگر عنصر منحصر به فردی از آن را به جفت عنصر منتسب نماید. به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ را نسبت به عملگر جمع (+) بسته گوییم زیرا برای هر دو عنصر $a \in s$ و b عنصر دیگری مانند $c \in N$ می‌توان یافت بطوری که $a+b= c$ باشد. مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عملگر تفریق بسته نیست چون داریم $2 - 3 = -1$ در

حالی که $2, 3 \in N$ و $(-1) \notin N$ است.

۲- اصل شرکت‌پذیری : یک عملگر دودویی (*) روی مجموعه S شرکت‌پذیر است اگر داشته باشیم

$$(x * y) * z = x * (y * z) \qquad x, y, z \in S \text{ به ازای همه مقادیر}$$

۳- اصل جابجایی : یک عملگر (*) روی یک مجموعه دارای خاصیت جابجایی است هرگاه

$$x * y = y * x \qquad x, y \in S \text{ به ازای هر}$$

۴- عنصر شناسه : مجموعه S نسبت به عملگر (*) روی مجموعه S دارای عنصر شناسه است، اگر عنصر $e \in S$ با خاصیت زیر موجود باشد.

$$e * x = x * e = x \qquad x \in S \text{ به ازای هر}$$

مثال: عنصر 0 یک عنصر شناسه نسبت به عملگر (+) روی مجموعه اعداد صحیح $I = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ است، چون

$$x + 0 = 0 + x = x \qquad x \in I \text{ به ازای هر}$$

مجموعه اعداد طبیعی N دارای عنصر شناسه نیست زیرا 0 جزو مجموعه نمی‌باشد.

۵- معکوس : مجموعه‌ای چون S با عنصر شناسه e نسبت به عملگر (*) دارای معکوس است به شرطی که برای هر $x \in S$، یک $y \in S$ وجود داشته باشد به نحوی که

$$x * y = e$$

مثال: در مجموعه اعداد صحیح I، با e=0، معکوس عنصر a برابر $(-a)$ است چون $a+(-a)=0$

۶- اصل توزیع‌پذیری : اگر (*) و (.) دو عملگر روی مجموعه S باشند، (*) را روی (.) توزیع‌پذیر گوییم هرگاه

$$x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$$

مثالی جبری در این مورد میدان یا حوزه است. میدان مجموعه‌ای از عناصر است، همواره با دو عملگر دودویی، که هر یک دارای خواص 1 تا 5 بوده و هر دو عملگر برای تشکیل خاصیت 6 با یکدیگر ترکیب می‌شوند. مجموعه اعداد حقیقی، همراه با عملگرهای دودویی (+) و (.)، میدان اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهند. میدان اعداد حقیقی مبنای جبر معمولی و حساب است. عملگرها و اصول دارای مفاهیم زیر هستند:

عملگر دودویی (+) جمع را تعریف می‌کند.

شناسه جمع، 0 است.

معکوس جمع، تفریق می‌باشد.

عملگر دودویی (.) ضرب را تعریف می‌نماید.

شناسه ضرب 1 می‌باشد.

معکوس ضرب $a = 1/a$ تقسیم را تعریف می‌کند، یعنی $a \cdot (1/a) = 1$.

تنها اصل توزیع‌پذیری قابل اعمال مربوط به عملگر (.) روی (+) است:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

۲-۲ تعریف اصول اساسی جبر بول

در سال ۱۸۵۴ جورج بول یک برخورد سیستماتیک با منطق را معرفی نمود و برای اهداف خود یک سیستم جبری راکه امروزه آن را جبر بول می‌نامیم پایه‌ریزی کرد. در سال ۱۹۳۸ نیز سی.ای. شانون یک جبر بول دو مقداری به نام جبر سوئیچینگ را معرفی کرد که در آن خواص مدارهای سوئیچینگ با این جبر قابل ارائه است. برای تعریف مستدل جبر بول، ما اصول فرموله شده به وسیله ای. .ی. هانتینگتون در سال ۱۹۰۴ را بکار می‌بریم.

جبر بول یک ساختار جبری است که با عناصر مجموعه، یعنی B، همراه با دو عملگر دودویی (+) و (.) تعریف می‌شود به شرطی که اصول زیر (هانتینگتون) در آن معتبر باشد.

۱- (a) مجموعه نسبت به عملگر (+) بسته باشد.

(b) مجموعه نسبت به عملگر (.) بسته باشد.

۲- (a) یک عنصر شناسه 0 برای (+) وجود داشته باشد.

(b) یک عنصر شناسه 1 برای (.) وجود داشته باشد.

۳- (a) مجموعه نسبت به (+) دارای خاصیت جابجایی باشد: $x + y = y + x$

(b) مجموعه نسبت به (.) دارای خاصیت جابجایی باشد: $x \,.\, y = y \,.\, x$

۴- (a) (.) نسبت به (+) توزیع‌پذیر است: $x \,.\, (y + z) = (x \,.\, y) + (x \,.\, z)$

(b) (+) نسبت به (.) توزیع‌پذیر است: $x + (y \,.\, z) = (x + y) \,.\, (x + y)$

۵- برای هر عنصر $x \in B$، عنصری مثل $x' \in B$ وجود دارد (به آن متمم x می‌گوییم) به نحوی که:

(a) $x + x' = 1$ و (b) $x \,.\, x' = 0$

۶- حداقل دو عنصر $x, y \in B$ وجود دارد به نحوی که $x \neq y$ باشد.

با مقایسه جبر بول با حساب و جبر معمولی (حوزه یا میدان اعداد حقیقی) تفاوت‌های زیر قابل ملاحظه‌اند:

۱- اصول هانتینگتون فاقد اصل شرکت‌پذیری است. با این وجود، این اصول برای جبر بول معتبر و برای هر دو عملگر از دیگر اصول قابل استنتاج است.

۲- اصل توزیع‌پذیری (+) روی (.)، یعنی $x + (y \,.\, z) = (x + y) \,.\, (x + z)$، برای جبر بول معتبر است، ولی در جبر معمولی قابل قبول نیست.

۳- جبر بول دارای معکوس‌های جمع و ضرب نیست؛ بنابراین عملگرهای تفریق و تقسیم وجود ندارند.

۴- اصل ۵ عملگری به نام متمم را معرفی می‌نماید که در جبر معمولی وجود ندارد.

۵- جبر معمولی در مورد اعداد حقیقی بحث می‌کند، که یک مجموعه با بی‌نهایت عنصر را شامل می‌شود. جبر بول در مورد مجموعه‌ای از عناصر، B، بحث می‌نماید که هنوز آن را معرفی نکرده‌ایم، ولی بعداً در جبر بول دو مقداری یا دو ارزشی معرفی خواهد شد (کاربرد بعدی ما از این جبر مورد توجه است)، و در آن B بصورت مجموعه‌ای از دو عنصر 0 و 1 تعریف می‌شود.

جبر بول از بعضی لحاظ با جبر معمولی هماهنگی دارد. انتخاب سمبل‌های (+) و (.) به این علت مورد توجه قرار گرفته‌اند تا دستکاری جبر بول به وسیله شخصی که با جبر معمولی آشنایی دارد، ساده گردد. گرچه وی می‌تواند بخشی از دانش خود از جبر معمولی را در جبر بول بکار ببرد، ولی مبتدیان باید مراقب باشند تا قوانین جبر معمولی را در جاهایی که قابل استفاده نیستند، بکار نبرند.

لازم است تا اختلاف بین یک مجموعه از عناصر متعلق به یک ساختار جبری و متغیرهای یک سیستم جبری را بدانیم. مثلاً، اجزاء حوزه اعداد حقیقی، اعداد هستند، در صورتی که متغیرهایی مانند a ، b و c که در جبر معمولی بکار می‌روند، سمبل‌هایی هستند که به جای اعداد حقیقی بکار می‌روند. بطور مشابه در جبر بول مجموعه B دارای متغیرهایی مانند x، y و z می‌باشد که صرفاً سمبل هستند و عناصر را نشان می‌دهند. در اینجا لازم است بدانیم که به منظور داشتن یک جبر بول باید:

۱- عناصر مجموعه B مشخص باشند.

۲- قوانین عمل دو عملگر دودویی معین باشند.

۳- مجموعه عناصر، B ، همراه با دو عملگر، برای شش اصل هانتینگتون معتبر باشد.

بسته به انتخاب عناصر B و قوانین عملیات، می‌توان چندین جبر بول را فرموله کرد. در ادامه کار ما فقط با جبر دو ارزشی که تنها دو عنصر دارد، سروکار خواهیم داشت. جبر بول دو ارزشی در تئوری مجموعه‌ها و منطق کاربرد دارد. هدف ما در این کتاب کاربرد جبر بول در مدارهای منطقی گیتی است.

جبر بول دو ارزشی

جبر بول دو ارزشی روی مجموعه دو عنصری، $B = \{0, 1\}$ ، به همراه قوانین برای دو عملگر دودویی (+) و (.) که در جدول زیر نشان داده شده تعریف می‌شود (قانون عملگر متمم برای تصدیق اصل ۵ است):

x	y	x · y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x′
0	1
1	0

این قوانین دقیقاً مثل اعمال AND، OR و NOT در جدول ۸-۱ می‌باشند. اکنون نشان می‌دهیم که اصول هانتینگتون برای مجموعه $B=\{0, 1\}$ و دو عملگرهای دودویی که قبلاً تعریف شده‌اند، معتبر است.

۱- با توجه به جداول، بسته بودن کاملاً روشن است زیرا نتیجه هر عملگر 1 یا 0 بوده و $1,0 \in B$ می‌باشند.

۲- با توجه به جداول می‌بینیم که $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ (a) $0 + 0 = 0$

(b) $1.1 = 1$ $1.0 = 0.1 = 0$

این روابط بیانگر وجود عناصر شناسه 0 برای (+) و 1 برای (.) ، طبق تعریف اصل ۲ می‌باشند.

۳- اصول جابجایی با توجه به تقارن جداول عملگرها آشکار است.

۴- (a) صحت اصل توزیع‌پذیری $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ را با ایجاد جدول برای تمام مقادیر ممکن x, y و z، می‌توان تحقیق کرد. برای هر ترکیب، $x \cdot (y + z)$ را بدست آورده و نشان می‌دهیم که برابر $(x \cdot z) + (x \cdot y)$ است.

x	y	z	$y + z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(b) صحت اصل توزیع‌پذیری (+) روی (.) را نیز می‌توان مثل بند قبل تحقیق نمود.

۵- با استفاده از جدول متمم، به سادگی می‌توان دید که:

(a) $x + x' = 1$، زیرا $1 + 1 = 0 + 0' = 0$ و $1 + 1' = 1 + 0 = 1$ است

(b) $x \cdot x' = 0$، زیرا $0.1 = 0.0' = 0$ و $1.1' = 1.0 = 0$ است، که اصل ۵ را تصدیق می‌کند.

۶- اصل ۶ نیز صادق است زیرا جبر بول دو ارزشی دارای دو مقدار مجزای 0 و 1 با $0 \neq 1$ است.

تا اینجا ما یک جبر دو ارزشی با عملگرهای AND و OR و یک عملگر متمم معادل با NOT ایجاد کردیم. بنابراین جبر بول به روش مستدل ریاضی بنا گردید و نشان داده شد که معادل با منطق دودویی غیرمستدل بخش ۹-۱ است. بیان غیرمستدل برای درک کاربرد جبر بول در مدارهای گیتی مفید است. روش مستدل برای بیان و ایجاد تئوری‌ها و خواص سیستم جبری مورد توجه است. جبر بول دو ارزشی تعریف شده در این بخش را "جبر سوئیچینگ" نیز می‌نامند. برای تأکید بر تشابه بین جبر بول دو ارزشی و دیگر سیستم‌های دودویی، این جبر در بخش ۹-۱ "منطق دودویی" نامیده شد. از این پس، کلمه "دو ارزشی" را در بحث‌های بعدی از جبر بول حذف می‌کنیم.

۳-۲ قضایای اصلی و خواص جبر بول

دوگانگی

اصول هانتینگتون بصورت جفت جفت لیست شده‌اند و بصورت بخش‌های (a) و (b) مشخص شدند. هر یک از این دو را با تعویض عملگرها و عنصر شناسه می‌توان از دیگری بدست آورد. این خاصیت در جبر بول به اصل دوگانگی معروف است. خصوصیات فوق بیان می‌دارد که هر عبارت جبری منتج از اصول جبر بول با تعویض عملگرها و شناسه‌ها باز هم معتبر باقی می‌ماند. در جبر بول دو ارزشی، عناصر شناسه و عناصر مجموعه B یکسانند: یعنی 1 و 0اند. اصل دوگانگی کاربردهای متعددی دارد. اگر دوگان

یک عبارت جبری موردنظر باشد تنها کافی است عملگرهای AND و OR تعویض و 0ها به 1 و 1ها به 0 تبدیل گردند.

تئوری‌های اساسی

جدول (۱-۲) شش تئوری و چهار اصل از جبر بول را لیست کرده است. به خاطر سادگی از علامت (.) مادامی که اشتباه ایجاد نشود، صرف‌نظر شده است. تئوری‌ها و اصول لیست شده اساسی‌ترین روابط در جبر بول‌اند. تئوری‌ها نیز مانند اصول بصورت جفت جفت ارائه شده‌اند و هر رابطه دوگان زوج خود است. اصول، بدیهیات ساختار جبری بوده و اثباتی لازم ندارند. تئوری‌ها باید با توجه به اصول ثابت شوند، اثبات تئوری‌ها با یک متغیر در زیر نشان داده شده‌اند. در سمت مقابل روابط ، شماره اصل بکار رفته نوشته شده است.

تئوری ۱ (a): $x + x = x$

$$
\begin{aligned}
x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{به وسیله اصل: ۲ (b)}\\
&= (x + x)(x + x') && \text{(a) ۵}\\
&= x + xx' && \text{(b) ۴}\\
&= x + 0 && \text{(b) ۵}\\
&= x && \text{(a) ۲}
\end{aligned}
$$

تئوری ۱ (b): $x \cdot x = x$

$$
\begin{aligned}
x \cdot x &= xx + 0 && \text{به وسیله اصل: ۲ (a)}\\
&= xx + xx' && \text{(b) ۵}\\
&= x(x + x') && \text{(a) ۴}\\
&= x \cdot 1 && \text{(a) ۵}\\
&= x && \text{(b) ۲}
\end{aligned}
$$

جدول ۱-۲. اصول و تئوری‌های جبر بول

اصل ۲	(a)	$x + 0 = x$	(b)	$x \cdot 1 = x$
اصل ۱	(a)	$x + x' = 1$	(b)	$x \cdot x' = 0$
تئوری ۱	(a)	$x + x = x$	(b)	$x \cdot x = x$
تئوری ۲	(a)	$x + 1 = 1$	(b)	$x \cdot 0 = 0$
تئوری ۳ رجعت		$(x')' = x$		
اصل ۳ جابجایی	(a)	$x + y = y + x$	(b)	$xy = yx$
تئوری ۴ شرکت پذیری	(a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	(b)	$x(yz) = (xy)z$
اصل ۴ توزیع پذیری یا پخش	(a)	$x(y + z) = xy + xz$	(b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
تئوری ۵ دمورگان	(a)	$(x + y)' = x'y'$	(b)	$(xy)' = x' + y'$
تئوری ۶ جذب	(a)	$x + xy = x$	(b)	$x(x + y) = x$

توجه کنید که تئوری ۱ (b) دوگان ۱ (a) است و هر مرحله از اثبات در بخش (b) دوگان بخش (a) می‌باشد. به این ترتیب هر تئوری دوگان از اثبات زوجش حاصل می‌گردد.

تئوری ۲ (a): $x + 1 = 1$

	به وسیله اصل : ۲ (b)
$x + 1 = 1 \cdot (x + 1)$	
$= (x + x')(x + 1)$	(a) ۵
$= x + x' \cdot 1$	(b) ۴
$= x + x'$	(b) ۲
$= 1$	(a) ۵

تئوری ۲ (b): براساس دوگانگی $x \cdot 0 = 0$

تئوری ۳: $x = (x')'$. با توجه به اصل ۵، داریم $x + x' = 1$ و $x \cdot x' = 0$، که متمم x را تعریف می‌کند. متمم x' برابر x است و در نتیجه همان $(x')'$ می‌باشد. بنابراین، چون متمم منحصر به فرد است داریم $(x')' = x$.

با استفاده از اصول و تئوری‌های اثبات شده قبلی می‌توان تئوری‌های دو یا سه متغیره را بصورت جبری ثابت کرد. مثلاً: تئوری جذب را در نظر بگیرید.

تئوری ۶ (a): $x + xy = x$

	به وسیله اصل : ۲ (b)
$x + xy = x \cdot 1 + xy$	
$= x(1 + y)$	(a) ۴
$= x(y + 1)$	(a) ۳
$= x \cdot 1$	(a) ۲
$= x$	(b) ۲

تئوری ۶ (b): براساس دوگانگی $x (x + y) = x$

صحت تئوری‌های جبر بول را می‌توان با کمک جداول درستی هم تحقیق کرد. در جداول درستی، هر دو طرف رابطه چک می‌شوند تا نتایج مشابهی در ازاء همه ترکیبات متغیرها حاصل شود. تئوری جذب زیر صحت اولین جدول درستی را نشان می‌دهد.

x	y	xy	$x + xy$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

اثبات جبری اصل شرکت‌پذیری و تئوری دمورگان طولانی بوده و در اینجا آورده نمی‌شوند. با این وجود اعتبار آنها با جداول درستی نشان داده می‌شود. مثلاً جدول درستی برای اولین تئوری دمورگان

$(x + y)' = x'y'$ در زیر نشان داده شده است.

x	y	$x + y$	$(x + y)'$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

x'	y'	$x'y'$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

تقدم عملگرها

در ارزیابی عبارات جبر بول تقدم اول با پرانتز، دوم با NOT، سوم با AND و چهارم با OR است. به بیان دیگر، عبارت داخل پرانتز باید قبل از سایر عملگرها ارزیابی شود. عملگر مقدم بعدی متمم است. پس از آن AND و بالاخره OR قرار دارد. به عنوان مثال، جدول درستی را برای تئوری دمورگان تشکیل می‌دهیم سمت چپ عبارت $(x + y)'$ است. بنابراین داخل پرانتز ابتدا ارزیابی می‌شود و سپس نتیجه متمم می‌گردد. سمت راست عبارت $x'y'$ است. بنابراین متمم x و y هر دو ابتدا ارزیابی شده و حاصل AND می‌گردد. توجه کنید که در محاسبات معمولی هم روال مشابهی (به جز برای متمم) برای ضرب و جمع به ترتیب به جای AND و OR برقرار است.

۲-۴ توابع بول

جبر بول جبری است که با متغیرهای دودویی و عملیات منطقی سروکار دارد. یک تابع به وسیله یک عبارت جبری متشکل از متغیرهای دودویی، ثابت‌های 0 و 1 و سمبل‌های عملیاتی منطقی تشکیل شده است. برای مقدار مفروضی از متغیرهای دودویی، تابع می‌تواند 1 یا 0 باشد. به عنوان مثال تابع بولی زیر را در نظر بگیرید:

$$F_1 = x + y'z$$

اگر x برابر 1 باشد و یا هر دو y' و z برابر 1 باشند تابع F_1 برابر 1 است. در غیر این صورت F_1 برابر 0 خواهد بود. عمل متمم، وقتی $y' = 1$ باشد، $y = 0$ را دیکته می‌کند. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که اگر $x = 1$ یا اگر $y = 0$ و $z = 1$ باشد آنگاه $F_1 = 1$ خواهد بود. یک تابع بول رابطه‌ای منطقی را بین متغیرها بیان می‌کند. این تابع با تعیین مقدار دودویی عبارت برحسب همه مقادیر ممکن متغیرها ارزیابی می‌شود.

یک جدول بولی بصورت یک جدول درستی هم می‌تواند نشان داده شود. جدول درستی لیستی از 1ها و 0ها است که به متغیرهای دودویی تخصیص می‌یابد، و ستونی که مقدار نتایج را برای هر ترکیب نشان می‌دهد. تعداد سطرها در جدول درستی 2^n است، که n تعداد متغیرها در تابع است. ترکیبات دودویی برای جدول درستی از شمارش اعداد دودویی و از 0 تا $2^n - 1$ بدست می‌آید. جدول (۲-۲)، جدول درستی تابع F_1 را نشان می‌دهد. در این جدول هشت ترکیب دودویی ممکن برای تخصیص بیتی

جدول ۲-۲. جدول درستی برای F_1 و F_2

x	y	z	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

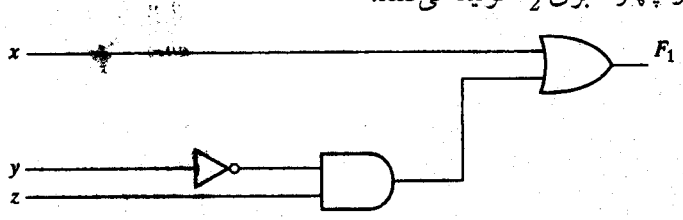
به سه متغیر x و y و z وجود دارد. ستونی که برچسب F_1 دارد در ازاء هر ترکیب 0 یا 1 است. جدول نشان می‌دهد که وقتی $x = 1$ یا $yz = 01$ باشد تابع F_1 برابر 1 است. در غیر این صورت 0 خواهد بود.

یک تابع بول را می‌توان از یک عبارت جبری به یک نمودار مداری متشکل از گیت‌های منطقی تبدیل کرد. نمودار مدار منطقی F_1 در شکل ۱-۲ نشان داده شده است. برای تولید متمم ورودی y وارونگری (معکوس‌گر) وجود دارد. برای جمله $y'z$ یک گیت AND و برای ترکیب آن دو یک گیت OR بکار رفته است. در نمودارهای مدار منطقی، متغیرهای تابع به عنوان ورودی مدار و متغیر دودویی F_1 به عنوان خروجی مدار در نظر گرفته می‌شوند.

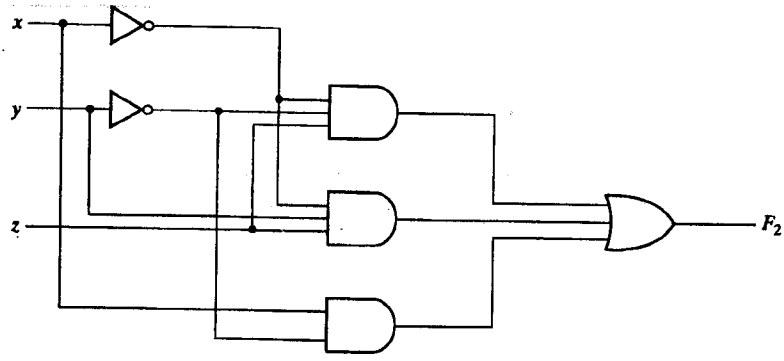
برای نمایش F_1 در یک جدول درستی تنها یک راه وجود دارد. با این وجود، وقتی تابع به فرم یک عبارت جبری است، می‌تواند به فرم‌های متفاوتی نشان داده شود. عبارت خاصی که برای مشخص کردن تابع مورد استفاده قرار می‌گیرد اتصالات میان گیت‌ها در نمودار مدار منطقی را دیکته می‌نماید. گاهی اوقات ممکن است با دستکاری یک عبارت بولی توسط قوانین جبر بول، عبارت ساده‌تری برای یک تابع بدست آوریم و بنابراین تعداد گیت‌ها در مدار و تعداد ورودی‌ها به هر گیت را کاهش دهیم. مثلاً تابع بولی زیر را در نظر بگیرید:

$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$$

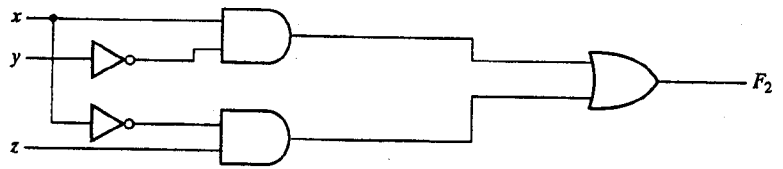
این تابع در شکل ۲-۲ (الف) پیاده‌سازی شده است. متغیرهای x و y به گیت وارونگر متمم شده‌اند تا x' و y' بدست آیند. سه جمله در عبارت با سه گیت AND پیاده‌سازی شده‌اند. گیت OR نیز، OR منطقی سه جمله را فراهم می‌سازد. جدول درستی F_2 در جدول ۲-۲ آمده است. وقتی که $xyz = 001$ یا 011 و یا $x\ y = 10$ باشد (بدون توجه به z)، تابع برابر 1 است، در غیر این صورت 0 است. این شرایط چهار 1 و چهار 0 برای F_2 تولید می‌کنند.



شکل ۱-۲. پیاده‌سازی با گیت $F_1 = x + y'z$



$F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$ (الف)



$F_2 = xy' + x'z$ (ب)

شکل ۲-۲. پیاده‌سازی تابع بول F_2 با گیت

اکنون ساده‌سازی ممکن برای تابع را با اعمال بعضی از ویژگی‌های جبر بول ملاحظه کنید:

$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy' = x'z(y' + y) + xy' = x'z + xy'$$

تابع تنها به دو جمله کاهش یافته و قابل پیاده‌سازی با گیت مطابق شکل ۲-۲ (ب) است. بدیهی است که مدار شکل (ب) ساده‌تر از (الف) می‌باشد، ولی هر دو یک تابع را پیاده‌سازی می‌کنند. تساوی دو عبارت را می‌توان به کمک جدول درستی هم تحقیق کرد. عبارت ساده شده، وقتی xz = 01 یا xy = 10 باشد، برابر 1 است. این تابع هم همان چهار 1 را در جدول تولید می‌کند. چون هر دو عبارت جدول درستی یکسانی را تولید می‌کنند به آنها معادل گوییم. بنابراین، دو مدار به ازاء همه ترکیبات ممکن متغیرهای ورودی، خروجی‌های یکسانی دارند. هر دو عبارت تابع یکسانی را تولید می‌کنند ولی یکی از آنها گیت‌ها و ورودی‌های کمتری نسبت به دیگری دارد و بنابراین چون سیم‌بندی و قطعات کمتری نیاز است بر دیگری ترجیح داده می‌شود.

دستکاری جبری

وقتی که یک عبارت بولی با گیت‌های منطقی پیاده‌سازی شود، هر جمله به یک گیت نیاز دارد و هر متغیر در جمله یک ورودی به یک گیت است. ما لیترال را یک متغیر تک در یک جمله می‌نامیم که ممکن است متمم شود یا نشود. مثلاً تابع شکل ۲-۲ (الف) دارای سه جمله و هشت لیترال است، دو تابع شکل ۲-۲ (ب) دو جمله و چهار لیترال دارد. اغلب در تابع بول با کاهش تعداد جملات، تعداد لیترال‌ها، یا

هر دو مدار ساده‌تری حاصل می‌شود. هدف از دستکاری جبر بول غالباً کاهش یک عبارت به منظور دستیابی به یک مدار ساده‌تر است. توابعی که تا پنج متغیر دارند قابل ساده‌سازی با روش نقشه که در فصل بعد آمده، هستند. برای توابع بول پیچیده‌تر، طراحان دیجیتال از برنامه‌های کامپیوتر کوچک‌سازی استفاده می‌کنند. تنها روش دستی موجود، روال سعی و کاهش می‌باشد که از روابط ساده و تکنیک‌های دستکاری آشنا استفاده می‌کند. مثال‌های زیر دستکاری جبری جبر بول را نشان می‌دهد.

مثال ۱-۲

توابع بولی زیر را با حداقل لیترال‌ها ساده کنید.

۱- $x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy.$

۲- $x + x'y = (x + x')(x + y) = 1(x + y) = x + y.$

۳- $(x + y)(x + y') = x + xy + xy' + yy' = x(1 + y + y') = x.$

۴-
$$\begin{aligned} xy + x'z + yz &= xy + x'z + yz(x + x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) \\ &= xy + x'z. \end{aligned}$$

۵- از دوگان تابع ۴ $(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$

❑

توابع ۱ و ۲ دوگان یکدیگرند، و در مراحل حلی خود نیز از خاصیت دوگانگی استفاده کرده‌اند. راه ساده‌تری برای ساده‌سازی تابع ۳ به کمک اصل ۴ (b) در جدول ۱-۲ آمده است: یعنی $(x + y)(x + y') = x + yy' = x$. چهارمین تابع این واقعیت را بیان می‌دارد که یک افزایش در تعداد لیترال‌ها گاهی منجر به عبارت نهایی ساده‌تر می‌گردد. تابع ۵ مستقیماً ساده نشده است، ولی می‌تواند با استفاده از دوگان مراحل مربوط به تابع ۴ بدست آید. توابع ۴ و ۵ را به عنوان تئوری وفاق می‌شناسند.

متمم یک تابع

متمم یک تابع F برابر F' است و از تعویض 0ها با 1 و 1ها با 0 در مقدار F بدست می‌آید. متمم یک تابع را می‌توان بصورت جبری از تئوری دمورگان نیز بدست آورد. جفت تئوری مذکور در جدول ۱-۲ برای دو متغیر داده شد. تئوری‌های دمورگان به سه یا چند متغیر هم قابل گسترش‌اند. با استفاده از اصول و تئوری‌های لیست شده در جدول ۱-۲، فرم سه متغیره اولین تئوری دمورگان به طریق زیر ثابت می‌شود.

$$\begin{aligned} (A + B + C)' &= (A + x)' && \text{با فرض } B + C = x \\ &= A'x' && \text{با تئوری ۵ (a) دمورگان} \\ &= A'(B + C)' && B + C = x \text{ را جایگزین کنید} \\ &= A'(B'C') && \text{با تئوری ۵ (a) دمورگان} \\ &= A'B'C' && \text{با تئوری ۴ (b) شرکت‌پذیری} \end{aligned}$$

تئوری‌های دمورگان برای هر تعدادی از متغیرها، مشابه حالت دو متغیره بوده و با روش جایگزینی متوالی، مشابه روشی که در فوق مشاهده شد، می‌توان آن را بدست آورد. فرم عمومی تئوری دمورگان به صورت زیر است:

$$(A + B + C + D + \ldots + F)' = A'B'C'D' \ldots F'$$
$$(ABCD \ldots F)' = A' + B' + C' + D' + \ldots + F'$$

این تئوری بیان می‌دارد که متمم یک تابع با تعویض عملگرهای AND و OR و متمم کردن هر لیترال حاصل می‌شود.

مثال ۲-۲

متمم توابع $F_1 = x'yz' + x'y'z$ و $F_2 = x(y'z' + yz)$ را بدست آورید. متمم‌ها را با اعمال هر تعداد تئوری دمورگان بصورت زیر بدست آورید:

$$F_1' = (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')'(x'y'z)' = (x + y' + z)(x + y + z')$$
$$F_2' = [x(y'z' + yz)]' = x' + (y'z' + yz)' = x' + (y'z')'(yz)'$$
$$= x' + (y + z)(y' + z')$$

❑

روال ساده‌تری برای بدست آوردن متمم یک تابع این است که دوگان تابع و متمم هر لیترال بدست آید. این روش با توجه به فرم عمومی تئوری دمورگان نتیجه می‌شود. به خاطر داشته باشید که دوگان یک تابع با تبدیل عملگر AND به OR و تبدیل 1ها و 0ها به یکدیگر بدست می‌آید.

مثال ۲-۳

متمم توابع F_1 و F_2 مثال ۲-۲ را با استفاده از دوگان‌ها و متمم‌های هر لیترال بدست آورید.

۱) $F_1 = x'yz' + x'y'z'$

دوگان تابع F_1 برابر است با: $(x' + y' + z')\ (x' + y' + z)$

متمم هر لیترال برابر است با: $(x + y' + z)\ (x + y + z') = F_1'$

۲) $F_2 = x(y'z' + yz)$

دوگان تابع F_2 برابر است با: $x + (y' + z')\ (y + z)$

متمم هر لیترال برابر است با: $x' + (y + z)\ (y' + z') = F_2'$

❑

۲-۵ فرم‌های استاندارد و متعارف

مینترم‌ها و ماکسترم‌ها

یک متغیر دودویی ممکن است به فرم معمولی (x) یا متمم (x') ظاهر شود. اکنون تصور کنید که دو

جدول ۳-۲ . مینترم‌ها و ماکسترم‌ها برای سه متغیر دودویی

			مینترم‌ها		ماکسترم‌ها	
x	y	z	جمله	علامت	جمله	علامت
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

متغیر دودویی x و y با عملگر AND با هم ترکیب شوند. چون هر متغیر ممکن است به هر یک از دو شکل فوق ظاهر گردد، چهار ترکیب برای آنها متصور است: $x'y'$، $x'y$، xy' و xy. هر یک از این چهار جمله AND را یک مینترم یا یک جمله ضرب استاندارد گویند. بطور مشابه n متغیر را می‌توان ترکیب کرده و 2^n مینترم به وجود آورد. 2^n مینترم مختلف را می‌توان با روشی مشابه با آنچه در جدول ۳-۲ آمده، نشان داد. اعداد دودویی از صفر تا $2^n - 1$ زیر ستون n متغیر لیست شده‌اند. هر مینترم از AND تمام n متغیر بدست می‌آید که در آن هر متغیر پریم‌دار متعلق به بیت 0 و بدون پریم با 1 نشان داده می‌شود. سمبل هر مینترم نیز در جدول با m_j نشان داده شده است. که در آن J معادل دهدهی عدد دودویی مربوط به مینترم است.

به طریق مشابهی، n متغیر یک جمله OR تشکیل می‌دهند که هر متغیر ممکن است پریم‌دار یا بدون پریم باشد. 2^n ترکیب ممکن را ماکسترم یا جمع استاندارد گویند. هشت ماکسترم برای سه متغیر، همراه با سمبل آنها در جدول ۳-۲ لیست شده‌اند. هر 2^n ماکسترم برای n متغیر بطریق مشابهی حاصل می‌شود. هر ماکسترم از یک جمله OR با n متغیر بدست می‌آید که در آن متغیر پریم‌دار با 1 و بدون پریم با 0 نشان داده می‌شود. توجه کنید که هر ماکسترم، متمم مینترم مربوطه‌اش می‌باشد و بالعکس.

یک تابع بول می‌تواند بصورت جبری با استفاده از جدول درستی و با تشکیل مینترم‌های هر ترکیب از متغیرهایی که برای تابع، 1 را تولید می‌کنند، و اجرای عملگر روی OR همه این جملات ایجاد شود. مثلاً f_1 در جدول ۴-۲ با ترکیبات 001، 100 و 111 بصورت $x'y'z$, $xy'z'$ و xyz بیان می‌شود. چون هر

جدول ۴-۲ . توابع سه متغیره تابع f_1 تابع f_2

x	y	z	تابع f_1	تابع f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

یک از این مینترم‌ها $f_1 = 1$ را ایجاد می‌نمایند پس:

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$f_2 = x'yz + xy'z + xyz' + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

این مثال‌ها خصوصیت مهمی از جبر بول را به نمایش می‌گذارند: یعنی هر تابع بولی را می‌توان بصورت جمع مینترم‌ها نشان داد "جمع به معنی OR جملات است".

اکنون متمم تابع بول را ملاحظه نمایید، می‌توان آن را با تشکیل مینترم‌هایی در جدول درستی که 0 تابع را تولید می‌کنند، ایجاد کرد و سپس آنها را OR نمود. متمم f_1 چنین است:

$$f_1' = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$$

اگر متمم f'_1 را بدست آوریم تابع f_1 بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} f_1 &= (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z')(x' + y' + z) \\ &= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6 \end{aligned}$$

بطور مشابه، می‌توان عبارت f_2 را از جدول بدست آورد:

$$\begin{aligned} f_2 &= (x + y + z)(x + y + z')(x + y' + z)(x' + y + z) \\ &= M_0 M_1 M_2 M_4 \end{aligned}$$

این مثال‌ها نیز دومین خاصیت جبر بول را به نمایش می‌گذارند: هر تابع بول را می‌توان بصورت ضرب ماکسترم‌ها (ضرب به معنی AND است) در آورد. روال تهیه ضرب ماکسترم‌ها مستقیماً از جدول درستی به فرم زیر میسر است. برای هر ترکیبی از متغیرها ماکسترم‌هایی که در تابع 0 تولید می‌کنند را تشکیل دهید، و سپس AND همه ماکسترم‌ها را بدست آورید. توابع بول که بصورت جمع مینترم‌ها یا ضرب ماکسترم بیان شوند را فرم متعارف نامند.

مجموع مینترم‌ها

قبلاً بیان شد که برای هر n متغیر دودویی 2^n مینترم مجزا وجود دارد و هر تابع بولی می‌تواند بصورت مجموعی از مینترم‌ها در آید. مینترم‌هایی که جمع آنها توابع بول را تعریف می‌کنند، آنهایی هستند که 1های تابع را در جدول درستی تشکیل می‌دهند. چون تابع در قبال هر مینترم می‌تواند 0 و یا 1 باشد، و چون 2^n مینترم وجود دارد، می‌توان تعداد توابع ممکن که با n متغیر ایجاد می‌شود را 2^{2^n} دانست. گاهی بهتر است تابع بول را برحسب جمع مینترم‌ها بیان کنیم. اگر در این فرم نبود، می‌توان ابتدا آن را بصورت جمع جملات AND در آورد. آنگاه هر ترم برای یافتن همه متغیرها در آن وارسی می‌شود. اگر یک یا چند متغیر وجود نداشته باشند، می‌توان جمله را در عبارتی مثل $x + x'$، AND نمود، که x یکی از متغیرهای مفقود شده است. مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.